Kretsmodeller för transmissionsledningar med förluster – användning av matriser *Del 2*

Av: *Jan Gunmar*, *SM0AQW*

Kretsmodeller för transmissionsledningar –

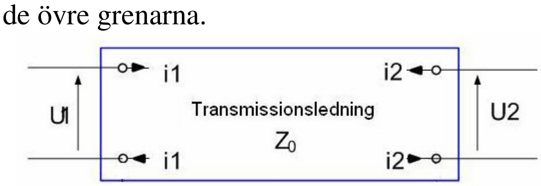
När man konstruerar kretsar med både diskreta RCL-element och transmissionsledningar är det ofta praktiskt att använda fyrpolsparametrar och tillhörande kretsmodell för att beskriva kretsen. Detta ger ordning och beräkningsekonomi – kretsanalyser kräver ju ofta mycket ”siffertuggande” och ett systematiskt arbetssätt minskar risken för fel.

Det finns flera uppsättningar fyrpolsparametrar. När man analyserar kretsar med diskreta komponenter används ofta någon av *x*-, y- eller *ABCD*-parametrarna. De är alla ganska lätta att använda även om man inte gör det varje dag. Det finns flera amdra uppsättningar: *h*-parametrarna är välkända från analys av transistorkretsar medan mikrovågstekniker föredrar att arbeta med *s*- parametrar. Mikrovågor är ett kapitel för sig eftersom begreppen impedans, spänning och ström ofta är svåra att tillämpa när komponenternas fysiska storlek är av ordningen våglängder. Tillsammans med s-parametrarna används i stället begreppen reflektionskoefficient, ståendevågförhållande och dämpning.

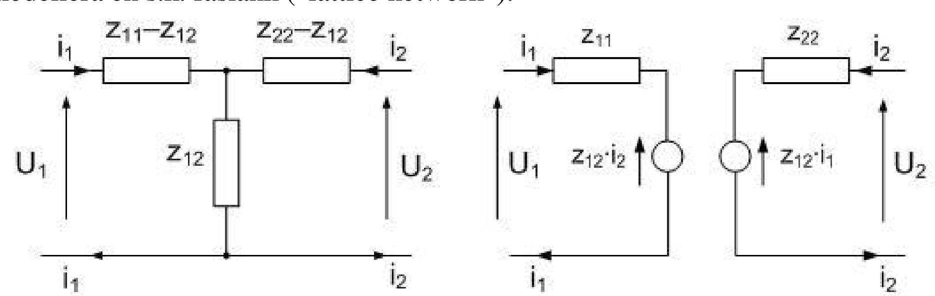
Z parametrar

Z parametrarna fär ett fyrpolsnät beskriver sambandet in- och utspänningarna uttryckta i nätets in- och utströmmar. När man använder z-parametrar används konventionen (symmetriskäl!) att in- och utströmmarna både flyter *in* mot nätet i de övre grenarna.

$$
\begin{aligned}
U_1 &= z_{11} \cdot i_1 + z_{12} \cdot i_2 \\
U_2 &= z_{21} \cdot i_1 + z_{22} \cdot i_2
\end{aligned}
\qquad (2)
$$



Två kretsmodeller som direkt motsvarar dessa ekvationer ses i fig. 1 nedan. Den högra modellen är uppbyggd med *beroende strömkällor* medan den vänstra är ett T-nät med impedanser. I modellen med strömkällor är utgångskretsen ”flytande” från början och kan användas när de nedre in- och utgångarna inte har samma potential, t.ex. om man vill skruva eller ”twista” en transmissionsledning eller om man vill modellera en s.k. faslänk (”lattice network”).



Figur 1

När man använder den vänstra kretsmodellen och behöver en “flytande“ utgång ska en *ideal 1:1 transformator* läggas till i kaskad med nätet, se figur 2b ovan. z matrisen för en transmissionsledning är:

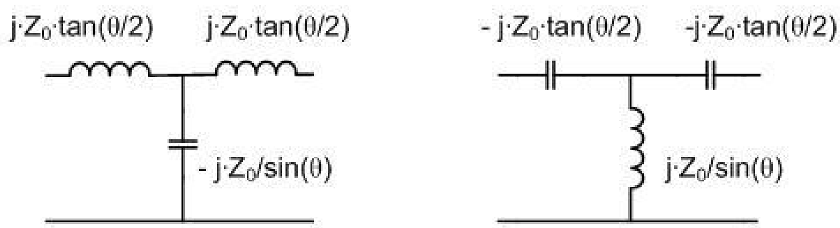
$$
\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_0 \cdot \coth(\theta) & Z_0 \cdot \dfrac{1}{\sinh(\theta)} \\ Z_0 \cdot \dfrac{1}{\sinh(\theta)} & Z_0 \cdot \coth(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \mathbf{Z} = \frac{Z_0}{\sinh(\theta)} \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & 1 \\ 1 & \cosh(\theta) \end{pmatrix}
$$

(en konstant faktor kan brytas ut ur en matris) z-parametrarna har alla dimensionen impedans.

För en förlustfri ledning är θ rent imaginär = j·β och z matrisen blir

$$\mathbf{Z} = \frac{Z_0}{j\cdot\sin(\theta)}\begin{pmatrix}\cos(\theta) & 1 \\ 1 & \cos(\theta)\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} Z_{11} &= Z_{22} = -\,j\cdot Z_0\cdot\cot(\theta) \\ Z_{12} &= -\,j\cdot Z_0/\sin(\theta) \end{aligned}$$

För en transmissionsledning är de ekivalenta T-näten för ledningslängder mellan 0 och λ/2 och mellan λ/2 och λ lågpass. och högpass-nät, respektive, figur 2.

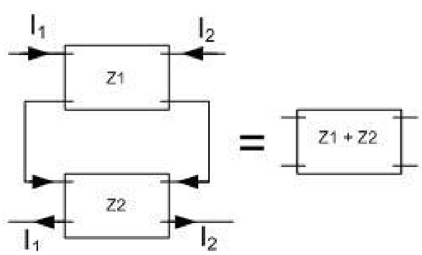


Figur 2

0 < ledningslängd < λ/2 λ/2 < ledningslängd < λ

Det kan vara bra att ha dessa ekvivalenter i minnet när man gör analyserar kretsar med transmissionsledningar.

z parametrarna är lämpliga att använda när två nät är *seriekopplade* (Fig. 3) eftersom z matrisen för det resulterande nätet är summan av de individuella z parameter matriserna. Observera den definition av seriekoppling för fyrpoler som visas i figuren!

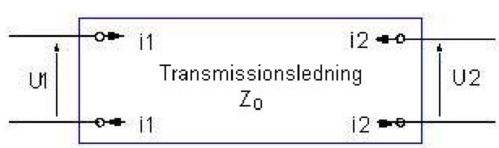


Figur 3

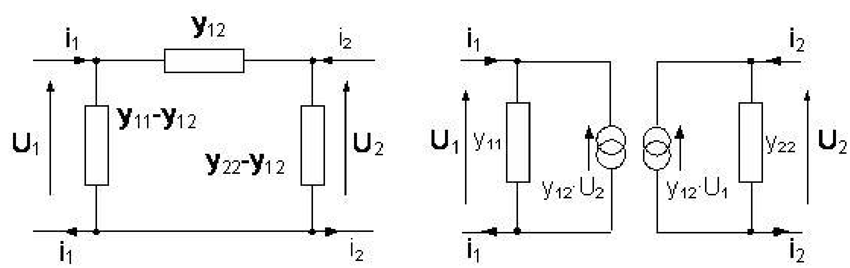
Y parametrar

y-parametrarna definierar nätets in- och utströmmar som funktioner av in och utspänningarna. När man använder y parametrar används liksom med z-parametrar konventionen att in- och utströmmarna både flyter *in* mot nätet (symmetriskäl!).

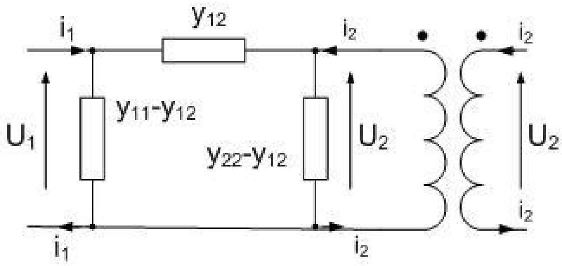
$$\begin{aligned} i_1 &= y_{11}\cdot U_1 + y_{12}\cdot U_2 \\ i_2 &= y_{21}\cdot U_1{}' + y_{22}\cdot U_2 \end{aligned} \qquad (14)$$



Figur 4



y-parametrarna har alla dimensionen admittans och det finns två användbara kretsmodeller (fig. 4). Den högra modellen i figur 4 realiseras m.h.a. *beroende strömkällor* och är ofta praktisk att använda när utgångssidan av nätet måste vara flytande i förhållande till ingångskretsen. När man använder den vänstra modellen och behöver en “flytande sekundär” ska man lägga in en *ideal 1:1 transformator* i kaskad med nätet, figur 5:



Figur 5

Ekvation (14) skrivs ofta i matrisform:

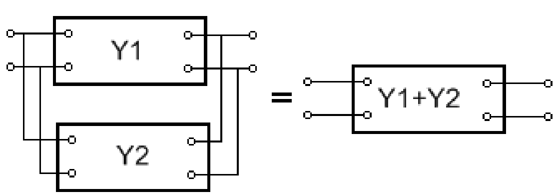
$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Y}\cdot\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad \text{där y- matrisen är} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \qquad (15)$$

y-matrisen för en transmissionsledning är

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{Z_0}\cdot\coth(\theta) & \frac{-1}{Z_0\cdot\sinh(\theta)} \\ \frac{-1}{Z_0\cdot\sinh(\theta)} & \frac{1}{Z_0}\cdot\coth(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{eller enklare,} \quad \mathbf{Y} = \frac{1}{Z_0\cdot\sinh(\theta)}\begin{pmatrix} \cosh(\theta) & -1 \\ -1 & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Omvandling mellan y och z parametrarna kan också göras med de välkända *stjärn-delta transformationerna.*

En stump transmissionsledning är ett *bilateralt* och *symmetriskt* kretselement – “det fungerar likadant åt båda riktningarna” – vilket innebär att $y_{11} = y_{22}$ och $y_{12} = y_{21}$. y- parametrarna är praktiska att använda när två nät är parallellkopplade därför att y-matrisen för den sammansatta nätmodellen är summan av de individuella y-parametermatriserna:



$$\begin{pmatrix} y1_{11} & y1_{12} \\ y1_{21} & y1_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y2_{11} & y2_{12} \\ y2_{21} & y2_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y1_{11} + y2_{11} & y1_{12} + y2_{12} \\ y1_{21} + y2_{21} & y1_{22} + y2_{22} \end{pmatrix}$$

Matriser och vektorer - allmänt

Vektor- och matrisräkning är effektiva matematiska grepp vid kretsanalyser. För många typer av beräkningar får man bättre ordning och mindre risk för fel genom systematiken och den kompakta notationen, En matris är en rektangulär tabell med element som är tal (reella eller komplexa) eller, mer allmänt, abstrakta storheter som kan adderas och multipliceras. man kan se dem som en utvidgning av talbegreppet. Matriser har en lång historia – en viktig tvåtusenårig kinesisk text “De Nio Böckerna om den Matematiska Konsten” av Chiu Chang Suan Shu, är bland först kända exemplen på hur man använder matriser för att lösa linjära ekvationssystem med många obekanta, se länken i referens [1]. Matriser används bl.a. för att lösa linjära ekvationssystem med många obekanta och hålla reda på koefficienterna i lnjära transformationer (rotationer, förflyttningar, projektioner, skaländringar). Matriser kan adderas, multipliceras och delas upp på olika sätt, vilket gör att de är kraftfulla verktyg för att hantera stora siffermängder i klump vid tekniska beräkningar. Utrymmet här räcker inte för att ge en översikt av räknereglerna för matriser och vektorer, men många bra orienteringar om matriser och hur de kan användas finns på Internet, se t.ex. [2]. En annan artikel om matriser som visserligen är riktad till utvecklare av dataspel, men som är allmänt grundläggande, bra skriven och som motiverar läsaren att lära sig mer är [3].

Den här artikeln avser inte att lära ut matrisalgebra utan endast att skapa litet nyfikenhet på matrisanvändning genom att visa några exempel på hur matriser och vektorer kan användas vid kretsanalys.

Betrakta in- och utsignaler som vektorer

När insignalen till en stump transmissionsledning är en konstant sinusspänning U1 vid inströmmen I_1 är kretsekvationerna för ledningen ett linjärt ekvationssystem:

$$U_1 = U_2 \cdot \cosh(\theta) + Z_0 \cdot \sinh(\theta) \cdot I_2$$

$$I_1 = U_2 \cdot \frac{\sinh(\theta)}{Z_0} + I_2 \cdot \cosh(\theta) \qquad (1)$$

Variablerna U_1, U_2, i_1 och i_2 är i allmänhet komplexa tal eftersom de kan vara sinsemellan fasförskjutna. Ekvationerna gäller vid tillräckligt höga frekvenser där den karakteristiska impedansen Z_0 för transmissionsledningen kan skrivas $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

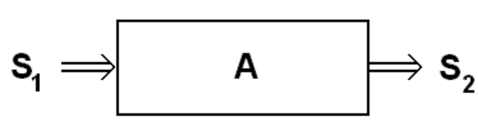
För att kunna resonera litet allmännare kan vi gå upp en abstraktionsnivå och tala om en *komplex insignalvektor* $\mathbf{S_1} = \begin{pmatrix} U_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$ och en *komplex utsignalvektor* $\mathbf{S_2} = \begin{pmatrix} U_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$

Ekvationssystemet (1) beskriver då hur insignalen $\mathbf{S_1}$ transformeras till utsignal $\mathbf{S_2}$. Transformationen bestäms av koefficientmatrisen A som är en "tabell" över koefficienterna i ekvationssystemet:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & Z_0 \cdot \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) \cdot \frac{1}{Z_0} & \cosh(\theta) \end{pmatrix}$$

och det kompaktaste skrivsättet för ekvationen (1) ovan blir då: $\mathbf{S_1 = A \cdot S_2}$

Man kan alltid para ihop in- och utvariablerna för en transmissionsledning (eller vilket linjärt filter som helst) och behandla signalparen som *vektorer* (eller *kolumnmatriser*): **S1** och **S2**

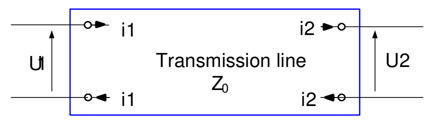


Insignalvektorn **S1** transformeras med matrisen **A** till utsignalvektorn **S2**; d.v.s. man kan också betrakta matrisen A som en *operator*. Resonemanget ovan är ett exempel på matematikerns strävan att generalisera och abstrahera så att man kan se en helhet på högre nivå; figuren ovan hjälper en kanske inte att "räkna ut ett talvärde" men ger en ny vinkling på hur man kan betrakta signalbehandling i linjära dynamiska system, antingen de är mekaniska, elektriska, optiska eller kvantmekaniska!

ABCD-parametrar och ABCD-matrisen

ABCD-parametrarna beskriver inspänning och inström som funktioner av utspänning och utström enligt ekvation (1). En vanligt konvention när man använder ABCD-parametrar är att i_1 och i_2 flyter i samma riktning:

$$U_1 = U_2 \cdot \cosh(\theta) + i_2 \cdot Z_0 \cdot \sinh(\theta)$$
$$i_1 = \frac{U_2}{Z_0} \cdot \sinh(\theta) + i_2 \cdot \cosh(\theta) \qquad (1)$$



Fyrpolsekvationerna kan skrivas:

$$U_1 = A \cdot U_2 + B \cdot i_2$$
$$i_1 = C \cdot U_2 + D \cdot i_2 \qquad (18)$$

och ABCD matrisen är

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & Z_0 \cdot \sinh(\theta) \\ \frac{1}{Z_0} \cdot \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

En grundegenskap hos alla ABCD matriser för passiva nät är att AD – BC = 1

För mätändamål kan koefficienterna A, B,C och D definieras på följande sätt:

A	"voltage transfer ratio"	$[U_1/U_2]_{I2=0}$	1/A = "spänningsförstärkning" i tomgång
C	"transfer admittance"	$[I_1/U_2]_{I2=0}$	överföringsadmittans
B	"transfer impedance"	$[U_1/I_2]_{U2=0}$	överföringsimpedans
D	"current transfer ratio"	$[I_1/I_2]_{U2=0}$	1/D = "strömförstärkning" vid kortslutning

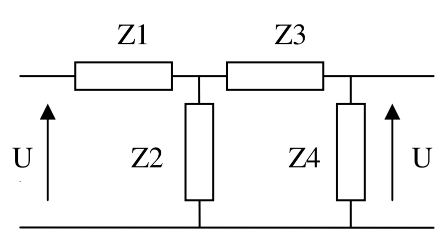
ABCD matrisen har många användbara och intressanta egenskaper. Eftersom den relaterar spännings- och strömvektorn (U_1,I_1) vid ingången till spännings- och strömvektorn (U_2,I_2) vid utgången av nätet är det lämpligt att använda ABCD matrisen när man kaskadkopplar fyrpolsnät; *ABCD matrisen för ett sammansatt nät är produkten av de individuella nätmatriserna.*

En demonstration av hur det här fungerar:

ABCD matrisen

för en serieimpedans är $\begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

för en shuntimpedans: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{pmatrix}$



Betrakta nätet Z1 – Z4 ovan till höger. Låt Z4 vara belastningsimpedansen – då blir ABCD matrisen för det sammansatta nätet produkten av fyra matriser:

$$\mathbf{M_{composite}} = \begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & Z_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_4} & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(Z_2 \cdot Z_4 + Z_1 \cdot Z_4 + Z_3 \cdot Z_2 + Z_3 \cdot Z_1 + Z_1 \cdot Z_2)}{Z_2 \cdot Z_4} & \frac{(Z_3 \cdot Z_2 + Z_3 \cdot Z_1 + Z_1 \cdot Z_2)}{Z_2} \\ \frac{(Z_4 + Z_3 + Z_2)}{Z_2 \cdot Z_4} & \frac{(Z_3 + Z_2)}{Z_2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$$

"Spänningsförstärkningen" (eller –dämpningen) U2/U1 (A) kan avläsas direkt – den är det inverterade värdet av A_1:

$$\text{Voltage\_gain} = \frac{1}{A_1} = \frac{(Z_2 \cdot Z_4)}{(Z_2 \cdot Z_4 + Z_1 \cdot Z_4 + Z_3 \cdot Z_2 + Z_3 \cdot Z_1 + Z_1 \cdot Z_2)}$$

Transformator

För en ideal *N:1 transformator* är ABCD-matrisen $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & \frac{1}{N} \end{pmatrix}$

Ett allmänt försiktighetsmått: för att förhindra att man inför oplanerade och svårupptäckta kortslutningar i mer komplexa kretsschemor där man använder diskreta x-, y- or ABCD-parametrar bör man beakta möjligheten att sätta in ideala 1:1 transformatorer på lämpliga ställen.

En multiplikationsregeln

En multiplikationsregel när man kaskadkopplar transmissionsledningar med lika impedans Z_0:

$$\begin{pmatrix} \cosh(\theta_1) & Z_0 \cdot \sinh(\theta_1) \\ \frac{1}{Z_0} \cdot \sinh(\theta_1) & \cosh(\theta_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh(\theta_2) & Z_0 \cdot \sinh(\theta_2) \\ \frac{1}{Z_0} \cdot \sinh(\theta_2) & \cosh(\theta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta_1 + \theta_2) & Z_0 \cdot \sinh(\theta_1 + \theta_2) \\ \frac{1}{Z_0} \cdot \sinh(\theta_1 + \theta_2) & \cosh(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

"Den elektriska längden hos två kaskadkopplade stubar med samma impedans är lika med summan av av de enskilda stubarnas elektriska längder" – kan verka självklart, men gäller dock inte om stubarna har olika karakteristiska impedanser.

Invers ABCD matris

Inversen till en allmän matris $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

är $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{(a \cdot d - b \cdot c)} & \frac{-b}{(a \cdot d - b \cdot c)} \\ \frac{-c}{(a \cdot d - b \cdot c)} & \frac{a}{(a \cdot d - b \cdot c)} \end{bmatrix} = \frac{1}{a \cdot b - c \cdot d} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Termen (ad - bc) som brutits ut ur matrisen kallas matrisens *determinant.* För ABCD-matriser är alltid determinantens värde = 1 och inversen till en ABCD matris blir

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$$

Pröva med multiplikation:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & CD - DC \\ -AB + BA & -CB + DA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ eftersom $A \cdot D - B \cdot C = 1$

$$\begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$$

Matematiskt är ABCD matrisen en ”linjär transformation eller avbildning mellan två vektorrum” och kan användas för att beskriva många mer generella fyrpoler än RCL filter och transmissionsledningar. Många intressanta tillämpningar finns inom fysiken; ett exempel från geometrisk optik beskrivs i [4} och det finns också talteoretiska tillämpningar, se [5], med anknytning till Fibonacci och Lucas-talen. ABCD matriser har gruppegenskaper under multiplikation: produkten av två ABCD matriser är alltid en ABCD-matris.

Till sist

För att förstå hur elektriska kretsar, antenner och transmissionsledningar beter sig vid höga frekvenser bör man tänka på att de fenomen som uppträder är av betydligt allmännare natur än de vi möter när vi analyserar konventionella nät aom LF-filter och kopplingskretsar i förstärkare. Vi funderar sällan över det faktum att konventionell kretsteori, baserad på Kirchhoff´s lagar, är en förenkling av en mer allmän teori. Konventionell kretsteori arbetar med kretsmodeller som har koncentrerade parametrar: resistans, kapacitans och induktans. Ömsesidig kopplingsverkan approximeras m.h.a. ömsesidig induktans och “strökapacitans”. All inverkan p.g.a. strålning och transportfödröjning mellan olika delar av kretsen försummas eller modelleras med enkla approximationer. Konventionell kretsteori är en approximatio*n*, anpassad för närzonen där strålningen kan försummas och komponenterna alla har fysiska dimensioner som är mycket mindre än våglängden för den mest högfrekventa signalen som är intressant vid analysen. Antenner och transmissionsledningar har fördelade parametrar och man måste ta till tyngre matematiska verktyg när man analyserar dem.

Begreppen induktans och kapacitans och impedans börjar förlora sin innebörd när ledande strukturer börjar bli “stora” räknat i våglängder eller när punkterna mellan man mäter inte längre ligger mycket nära varandra. Ett exempel: “antennkapacitans” är en term som ofta används i förenklade förklaringar av hur antenner beter sig, men termens brist på innebörd visar sig när man börjar ställa frågor som ‘hur mäter jag antennkapacitans?’ eller ‘kapacitans i förhållande till vad’? Likaså är frågan “vad är impedansen per meter hos en lång och rak tråd?” ganska meningslös.

En tredje fråga som visar arten av problemet är “vilka är de maximala fysiska dimensionerna vi kan ge en induktor innan dess Q-värde börjar avta p.g.a. strålningsverkan?” Detta är nog också en “icke-fråga” eftersom definitionen av Q är baserad på en impedansmätning, och om anslutningarna till induktorn är långt ifrån varandra kan man inte definiera impedansen mellan dem!

Referenser

[1] Matriser – litet historik
http://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_%28mathematics%29#History
[2] Matrisalgebra
http://www.math.hmc.edu/calculus/tutorials/matrixalgebra/
[3] Matrisalgebra, en populär inledning
www.gamedev.net/reference/articles/article1832.asp
[4}Behandling av “Ray tracing” i optiken m.h.a. ABCD matriser
http://en.wikipedia.org/wiki/Ray_transfer_matrix_analysis
[5] Fibonacci- och Lukastalen dyker upp i kretsanalyser
http://www.lhsorg.org/goldfinal77.htm
[6]Lösning av linjära ekvationssystem m.h.a. matriser: se
http://www.okc.cc.ok.us/maustin/Matrix_Solutions/Matrix%20Solution%20of%20Linear%20Systems.htm