

Kretsmodeller för transmissionsledningar med förluster

– analys av vågfällor av koaxialkabel

Del 1

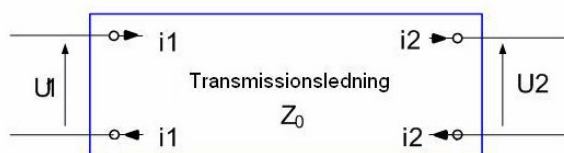
Av: Jan Gunmar, SM0AQW

Ibland behöver man analysera kretsar som innehåller stumpar av transmissionsledning, t.ex. vågfällor av koaxialkabel ("koaxtraps"), hybrider och baluner, men man är tveksam om hur man ska gå tillväga. Vilken kretsmodell är tillämplig, vilka begränsningar gäller? Den här artikeln ger några tips om hur man kan använda fyrpols- eller tvåportmodeller för analys av kretsar där stumpar av transmissionsledning ingår. Ett exempel ges på hur man kan analysera funktionen hos en vågfälla av koaxialkabel.

Stumpar av transmissionsledning är kretselement med *fördelade parametrar*, vilket bl.a. innebär att de inte kan approximeras noggrant över ett större frekvens område med ett ändligt antal diskreta R-, C- och L-komponenter (inkl. ömsesidig induktans). Kretsar med transmissionsledningar har också ofta en fysisk utsträckning som inte är liten jämfört med våglängderna inom det intressanta frekvensområdet och då är det inte säkert att närzonsapproximationer som t.ex. Kirchhoff's lagar är tillämpliga fullt ut. Man måste kanske ta hänsyn till strålnings- och fördröjningseffekter och göra en del av beräkningarna med ett simuleringsprogram.

En fyrpolsmodell

Figur 1 visar en fyrpolsmodell ("en black box") för en transmissionsledning med inspänning och inström U_1/i_1 och utspänning och -ström U_2/i_2 . Utströmmen i_2 flyter *utåt* (övre ledaren, mot höger) och den karakteristiska impedansen hos ledningen är Z_0 .



Figur 1
En fyrpolsmodell för en transmissionsledning

Den matematiska modellen för ledningen i dess differentiella mod vid stationärt tillstånd (inspänningen är en konstant sinusvåg) är följande par ekvationer:

$$U_1 = U_2 \cdot \cosh(\theta) + i_2 \cdot Z_0 \cdot \sinh(\theta) \quad (1)$$

$$i_1 = \frac{U_2}{Z_0} \cdot \sinh(\theta) + i_2 \cdot \cosh(\theta)$$

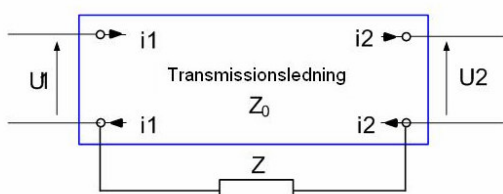
Parametern θ är *utbredningsfaktorn* för ledningen. θ är ett komplext tal $\theta = (\alpha + j \cdot \beta) \cdot \Lambda$, där Λ är ledningslängden. Termen $\alpha + j \cdot \beta$ är *utbredningskonstanten* för ledningen, sammansatt av *dämpningskonstanten* α och *faskonstanten* β . Faskonstanten β är proportionell mot frekvensen.

Termen *differentiell mod* ovan betyder att modellen bara representerar kretsens uppträdande när det föreligger strömbalans vid både ingång och utgång enligt figur 1. När strömmarna på en transmissionsledning är obalanserade flyter en s.k. ström i gemensam mod ("*common mode*") på ledningen. Termerna *longitudinell mod* och *lateral mod* används ibland i stället för gemensam och differentiell mod. En typisk situation när en common mode-ström kan flyta på en transmissionsledning är när en "jordad" generator är ansluten till en "jordad" belastning via en transmissionsledning och jordpunkten för generatoren har en annan HF-potential än jordpunkten för belastningen. Det här är mycket vanligt när det finns HF-fält utanför transmissionsledningen. Alla antaganden om att potentialerna för A och B är lika bör behandlas med misstänksamhet.

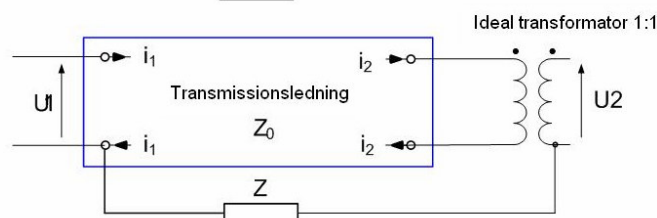
Modellen (1) ovan inkluderar inte inverkan av common mode-strömmar. En osymmetri (t.ex. en ström på utsidan av skärmen till en koaxialkabel) måste representeras av ytterligare kretselement. Lägga märke till strömriktningarna i de övre in- och utgångsanslutningarna – strömmen i_1 flyter in mot nätet och i_2 flyter utåt. Ibland använder man en eller modelldefinition där både i_1 och i_2 flyter in mot nätet – då måste tecknet för koefficienterna för i_2 i ekvation (1) kastas om. Ekv. (1) och resonemangen om common mode-strömmar gäller oavsett om transmissionsledningen är en ”öppen ledning” (bandkabel) eller en koaxialledning.

Ta med en strömväg för common mode-strömmar i modellen

För att ge en väg för en common mode-ström på transmissionsledningen kan man ansluta en impedans Z mellan de båda nedre anslutningarna till modellen i figur 1, se figur 2a nedan. För en koaxialkabel representerar Z impedansen hos den strömväg som finns på utsidan av kabelskärmen under förutsättningen att det fysiska avståndet mellan anslutningspunkterna för Z är *mycket mindre än en våglängd*. Tänk på att begreppet impedans gradvis förlorar sin betydelse när man ökar avståndet mellan de punkter mellan vilka man försöker mäta! Att representera en väg för common mode-strömmen med en impedans Z är en approximation som bara är tillåten om det fysiska avståndet mellan anslutningspunkterna för Z är mycket mindre än en våglängd. När det är nödvändigt att behålla utgången svävande i förhållande till ingången måste vidare en ideal transformator inkluderas i modellen, figur 2b.



Figur 2a



Figur 2b

Koefficienterna för U_2 och I_2 i ekvationerna (1) ordnas ofta i en matris \mathbf{M} som kallas *ABCD matrisen*:

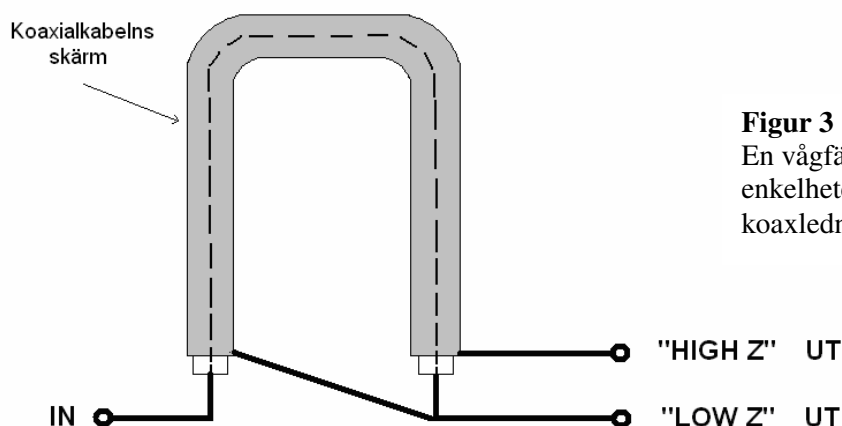
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & Z_0 \cdot \sinh(\theta) \\ \frac{1}{Z_0} \cdot \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{Ekv. (1) kan då skrivas} \\ \text{kortare:} \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Matriser är mycket användbara när man beräknar impedanser och överföringsegenskaper hos fympoler som baluner och andra kretsar med transmissionsledningar eftersom de hjälper att få litet ordning och ”beräkningsekonomi”. En kort översikt av z-, y- och ABCD-matriserna för passiva tvåportar ges i del 2 av denna artikel.

Ett exempel: beräkning av impedans och Q hos en vågfälla – en ”trap” – av koaxialkabel

Vågfällor av koaxialkabel används i många antennkonstruktioner. Huvudtillämpningen är att använda fällan som en väl definierad reaktiv belastning i antennelement för att åstadkomma multipla resonanser (t.ex. för flerbandsantennar). En begränsning för fällans användbarhet är dess Q-värde som inte får vara för lågt med tanke på förlusterna i antensystemet. Ofta anges ganska höga Q-värden för vågfällor i konstruktionsbeskrivningar, kanske grundade på tron att koaxialkabel alltid är en lågförlustkomponent när man använder någorlunda korta stumpar.

Det kan vara intressant att titta närmare på hur vågfällan fungerar och hur kabelns förlustfaktor påverkar Q-värdet i ett praktiskt fall. Figur 3 nedan visar två vanliga konfigurationer av vågfällor eller ”traps”. De skiljer sig åt bara genom att utgångarna är olika placerade – de kallas ofta ”High Z trap” och ”Low Z trap” i engelsk litteratur.

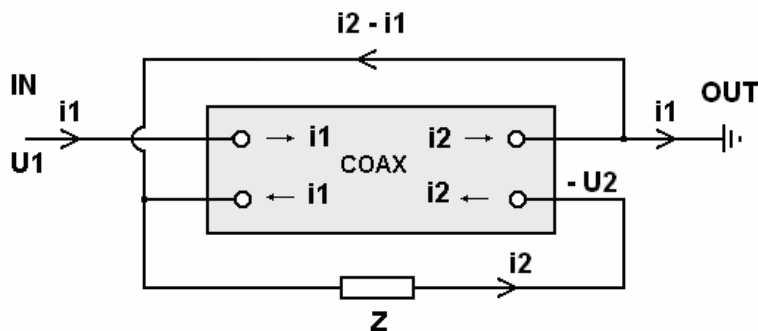


Figur 3

En vågfälla med koaxialkabel – för enkelhetens skull visas bara ett varv av koaxledningen

Analys av en ”Low Z Trap”

Figur 4 nedan visar schemat för en ”Low Z” vågfälla eller ”trap” där fyrpolsmodellen i figur 2 och ekvationerna (1) används. För att beräkna impedansen Z hos vågfällan mellan anslutningen IN och UT behöver vi kalkylera utströmmen i_1 när U_1 är given och sedan bilda kvoten $Z = U_1/i_1$. Strömmen i_1 flyter in i innerledaren till vänster. Innerledaren vid utgångssidan av koaxialkabeln är ansluten till akärmen/ytterledaren vid ingångssidan. Vanligen är in- och utströmmarna för en koaxstump olika; strömmen i_2 som flyter ut från den övre anslutningen till höger delas i en ström i_1 som flyter till UT och en ström $i_2 - i_1$ som flyter till den nedre ingångsanslutningen, där den adderas till strömmen i_1 . Strömmen genom Z blir alltså i_2 . För en ”Low Z” vågfälla i figur 3 blir alltså krettschemat enligt figur 4:.



Figur 4

Impedansen Z i schemat blir (approximativt) $Z = r + j\omega \cdot L$, där r och L är resistans och induktans hos den induktor som bildas av koaxskärmen och tilledningar (endast ett varv visas i figur 3). Normalt är Q hos denna induktor ganska högt (säg åtminstone 200 – 300). Kretsekvationerna för figur 4 blir:

$$i_2 \cdot Z = U_2$$

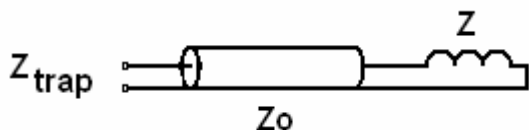
$$U_1 = U_2 \cdot \cosh(\theta) + i_2 \cdot Z_0 \cdot \sinh(\theta) \quad (2)$$

$$i_1 = \frac{U_2}{Z_0} \cdot \sinh(\theta) + i_2 \cdot \cosh(\theta)$$

Vågfällans impedans Z_{trap} kan nu beräknas genom att lösa i_1 ur ekvationssystemet (2) och bilda kvoten $Z_{\text{trap}} = U_1 / i_1$. Resultatet är:

$$Z_{\text{trap}} = Z_0 \frac{Z + Z_0 \tanh(\theta)}{Z_0 + Z \tanh(\theta)} \quad (3)$$

Uttrycket (3) för Z_{trap} är identiskt med inimpedansen för en koaxstump med transmissionsfaktorn θ som är belastad med impedansen Z i andra änden: ett nästan trivialt resultat som man också kunnat få genom att rita om kretsschemat figur 2a:



Z_{trap} har parallellresonans när absolutvärdet av nämnaren $Z_0 + Z \tanh(\theta)$ i (3) har ett minimum. Om ledningen är mycket kortare än en våglängd kan \tanh approximeras med $\tanh(\theta) \approx \theta$ och resonansfrekvensen beräknas approximativt genom att lösa ekvationen

$$\text{Imaginärdelen}_{\text{av}}[Z_0 \cdot \theta + r + j \cdot \omega \cdot L] = 0$$

När täljaren i (3) har ett minimum uppträder också serieresonans:

$$\text{Imaginärdelen}_{\text{av}}[Z_0 + (r + j \cdot \omega \cdot L) \cdot \theta] = 0 \quad (4)$$

Eftersom funktionen $\tanh(\theta)$ är periodisk med frekvensen kommer både serie- och parallellresonanser av högre ordning att uppträda när θ ökar tillräckligt. Inverkan av de resonanserna kan försummas när $|\theta| \ll 1$. För bättre noggrannhet kan man använda approximationen $\tanh(\theta) = \theta + \theta^3/3$, vilken ger ett fel $< 3\%$ för elektriska koaxlängder < 15 grader. De praktiska formlerna för α och β är:

$$\alpha = 2\pi \cdot \frac{G}{1663} \cdot \sqrt{\frac{f}{f_0}} \quad (1 \text{ Neper} = 8.686 \text{ dB}) \quad (5)$$

$$\beta = 2\pi \cdot \frac{f}{300V} \quad (\text{radianer}) \quad (6)$$

$$\theta = \Lambda(\alpha + j\beta) \quad (7)$$

Här är Λ stublängden i meter, f frekvensen i MHz, G dämpningsfaktorn i dB/100 fot och V hastighetsfaktorn hos transmissionsledningen. Faktorn f_0 är den frekvens där G är specificerad. Ett approximativt värde för den första parallellresonansfrekvensen f_{res} (i MHz) fås genom att anta att Z och koaxstubben är förlustfria ($\alpha = 0$, $r = 0$), vilket ger

$$Z_0 + j2\pi \cdot f_{\text{res}} \cdot \theta = 0. \quad (8)$$

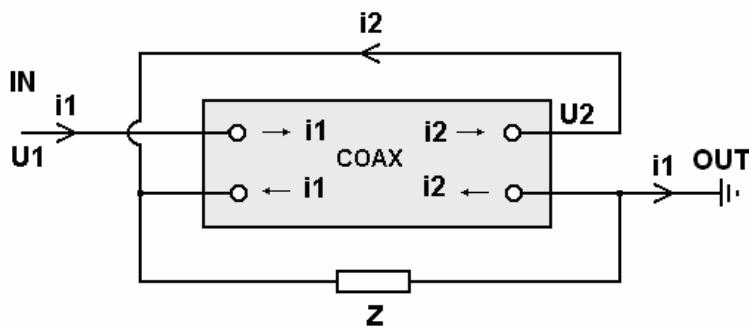
Ekvation (8) ger ett approximativt $\theta \approx j \cdot \beta \cdot \Lambda$ vilket tillsammans med (6) i sin tur ger:

$$f_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{Z_0 \cdot \frac{300V}{\Lambda \cdot L}} \quad \text{MHz} \quad (9) \quad (Z_0 \text{ i Ohm}, \Lambda \text{ i meter}, L \text{ i mikrohenry})$$

Ekv. (7) - (9) kan användas för praktisk konstruktion av en vågfälla: när Z_0 och V är givna av kabeltypen och lindningsdiametern är vald återstår det att iterera kabellängden Λ och därmed induktansen L tills den önskade resonansfrekvensen erhålls.

Analys av en "High Z" Trap

Figur 3 visar schemat för en "High Z" koaxialtrap. Koaxialkabelns innerledare (vid U₂) är ansluten till koaxskärmen vid ingången och strömmen genom Z blir nu $i_1 + i_2$:



Figur 3

Kretsekvationerna blir nu:

$$U_1 - U_2 = U_2 \cdot \cosh(\theta) + i_2 \cdot Z_0 \cdot \sinh(\theta)$$

$$i_1 = \frac{U_2}{Z_0} \cdot \sinh(\theta) + i_2 \cdot \cosh(\theta) \quad (10)$$

$$\frac{U_2}{Z} = i_1 + i_2$$

Efter förenkling erhålls impedansen $Z_{\text{trap}} = U_1/i_1$:

$$Z_{\text{trap}} = Z_0 \cdot \frac{(\cosh(\theta) + 1)}{\cosh(\theta)} \cdot \frac{2Z + Z_0 \cdot \tanh\left(\frac{\theta}{2}\right)}{Z_0 + Z \cdot \tanh(\theta)} \quad (11)$$

Formeln (11) liknar (3) – parallellresonansen är densamma – men impedansnivån för "High Z" blir approximativt fyra gånger högre än hos "Low Z" fällan eftersom $\cosh(\theta) \approx 1$ för små θ och termerna som innehåller tanh-funktioner är små jämfört med Z och Z_0 .

Det finns många beräkningshjälpmedel för konstruktion av vågfällor tillgängliga på Internet och en formel eller ett program för induktorkonstruktion är också en bra hjälp. Men var försiktig med att tolka resultaten – att köra samma problem genom flera av de hjälpmedel man hittar på Internet kan ge olika resultat (se t.ex kommentar om VE6YP-s välkända *coaxtrap.exe*. program på VK1OD-s site <http://www.vk1od.net/coaxtrap/index.htm>).

Ett numeriskt exempel – en "High Z" trap för 5.1 MHz

Vi ska studera en typisk koaxtrap som är konstruerad för resonans vid approximativt 5.1 MHz. En sådan fälla används ofta för 80 - 40m tvåbands antenner, se figur 4. Följande parametrar har hämtats från en konstruktion gjord av LA1IC.

Koaxialkabel typ RG58 :	$Z_0 = 52$ ohms
Hastighetsfaktor:	$V = 0.67$
Frekvens:	5.1 MHz
Förlustfaktor:	$G = 1.5$ dB/100 ft @ 10 MHz

Lindningsdata: 11 varv RG58 tätlindade på ett 2" O.D. PVC-rör

Fysisk kabellängd i vågfällan:	≈ 1.85 meter
Elektrisk längd hos kabeln	2.76 meter
Strökapacitans hos induktorn	≈10 pF (uppskattat värde)



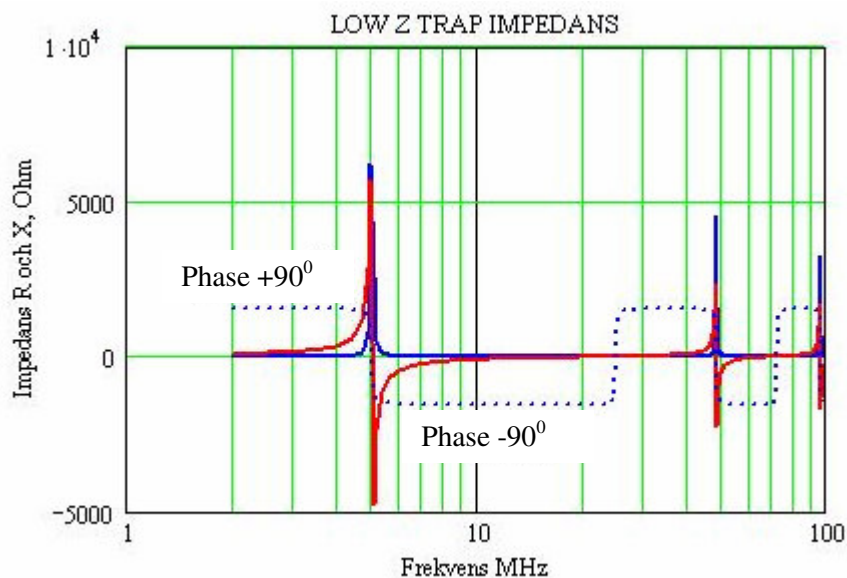
Figur 4 – en koaxialvågfalla konstruerad av Rolf Brevig, LA1IC

Märkningarna 7.9 och 4.35 vid anslutningarna indikerar att om man ansluter trådar med dessa längder (i meter) till vågfällan får man en radiator som t.ex. kan användas som en portabel duoband vertikal- eller sloperantenn för 80 och 40 m banden. Korta änden ska vara uppåt! Ett bra jordtag eller radialer är nödvändigt.

Bild: Rolf Brevig, LA1IC

Vågfällans impedansvariation med frekvensen

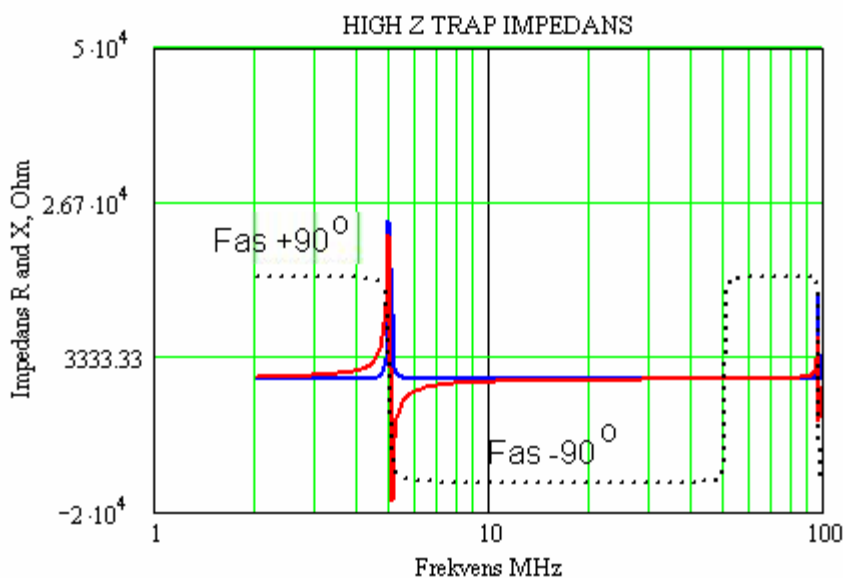
Figur 5 nedan visar impedansvariationen hos en “Low Z” trap beräknad med ekv. (3) över området 2 – 100 MHz. Tre parallellresonanser uppträder, vid 5.1 MHz och nära 25 och 100 MHz. Noggrannheten ovanför 50 MHz kan vara tveksam p.g.a. inverkan av oundvikliga strökapacitanser och layoutvariationer. Diagrammet har beräknats med en antaget värde på förlustresistansen $r = 0.5 \text{ Ohm}$ i koaxskärmen (vid 5 MHz) och en fördelad kapacitans över induktorn på 10 pF.



Figur 5

Real part R ————
 Imag part X ————
 Phase - - - - -

Impedansens fasvinkel har nollställen vid approximativt 27, 50, 73 och 99 MHz vilka överensstämmer ganska väl med $\lambda/4$, $\lambda/2$, $3\lambda/4$ och halvågs resonanserna hos den använda koaxstumpen. Figur 6 visar impedansvariationen hos en "High Z" trap.



The högre resonanserna har nu flyttat uppåt i frekvens och den första serieresonansen kommer vid ~ 50 MHz..

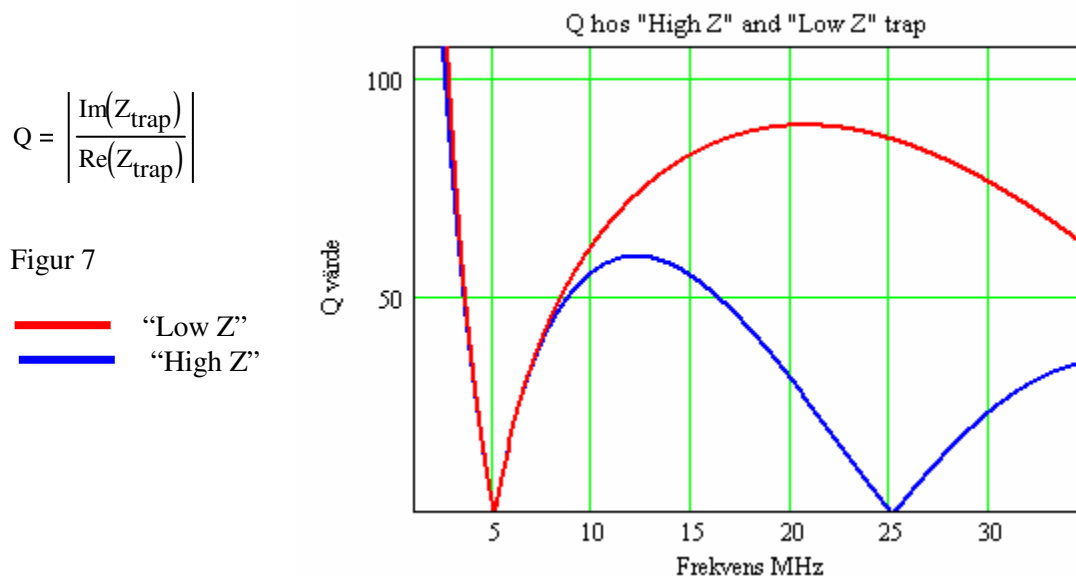
Figur 6

Real part R ————
 Imag part X ————
 Phase - - - - -

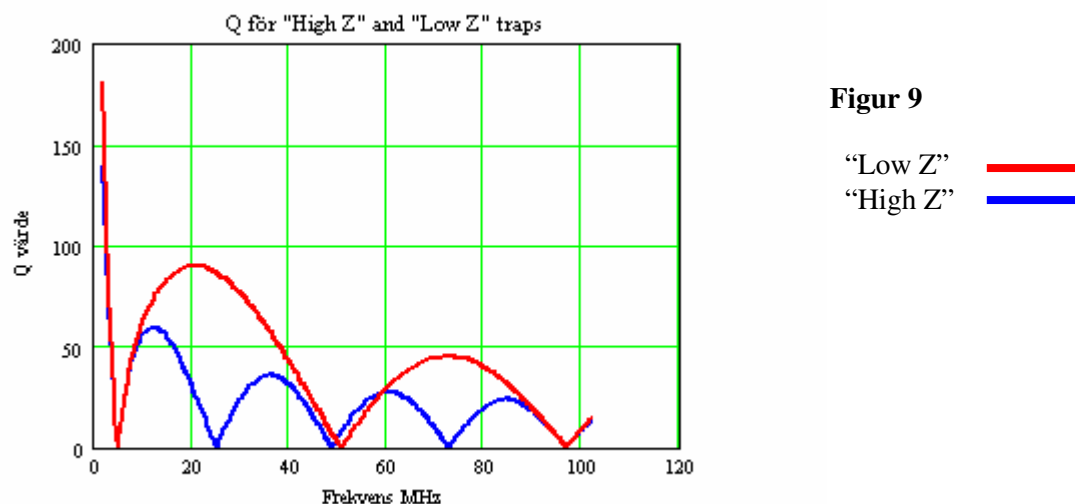
Q värde

För att visa inverkan av kabelns förlustfaktor i en typisk vågfälla har fällans Q-värde beräknats för båda trapversionerna under antagandet att koaxskärmen är nästan förlustfri ($r = 0.00005$ Ohm). Beräkningen har gjorts för det begränsade frekvensområdet 1-35 MHz.

Figur 7 nedan visar hur Q varierar med en typisk RG8 kabel ($G = 1.0$ dB/100 fot):



Q-värden i HF-området är betydligt lägre än vad flera konstruktionsprogram för koaxtraps utlovar. Det förefaller som om Q för en koaxtrap i första hand begränsas av förlustfaktorn för koaxledningen. Den förlustfaktor som använts här är 1dB/100 feet @ 10 MHz, vilket inte är särskilt pessimistiskt. Om den här fällan ska utnyttjas för simulering av en 80-40m tvåbandsantenn bör Q-värdet för den ekvivalenta LC-kretsen i simuleringsmodellen väljas i området 25 - 40, knappast mer! Figur 9 visar hur Q varierar över den fulla bandbredden 1 - 100 MHz för de två typerna av vågfällor.



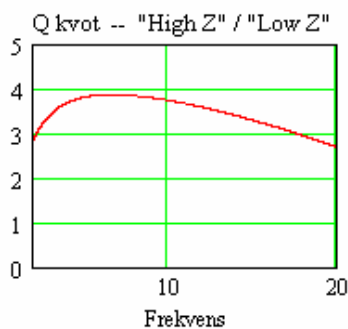
L/C-förhållande och LC parallellkrets ekvivalenter

För praktiska konstruktionsändamål kan man härleda förenklade formler för impedansen hos en vågfällan med koaxialkabel genom att göra approximationerna $\cosh(\theta) \approx 1$, $\tanh(\theta) \approx \theta$ och $Z \gg Z_0$ i formlerna för Z_{trap} (3) och (11) ovan. De approximativa trapimpedanserna blir

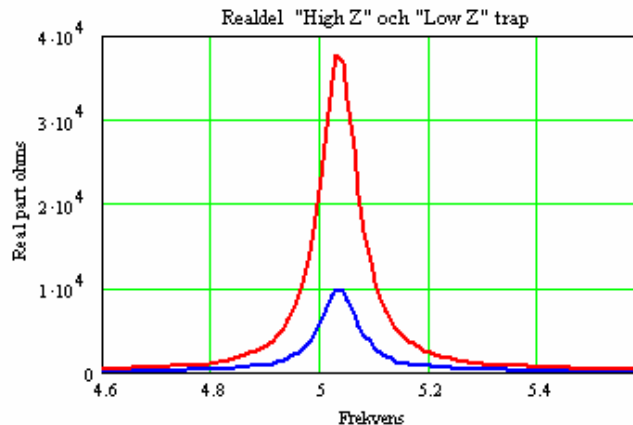
$$Z_{L_{\text{approx}}} = Z_0 \cdot \frac{Z}{Z_0 + Z \cdot \theta} \quad \text{"Low Z"} \quad \text{Diskret ekvivalent är: L i parallel with C} \quad (12)$$

$$Z_{H_{\text{approx}}} := Z_0 \cdot \frac{4Z}{Z_0 + Z \cdot \theta} \quad \text{"High Z"} \quad \text{Diskret ekvivalent är: 4 \cdot L i parallel with C/4} \quad (13)$$

Z representerar impedansen $j\omega L$ hos den induktor som bildas av koaxskärmen.



Figur 11 – Förhållandet mellan Q för “High Z” och “Low Z” fällor



Figur 10 Impedansens realdelar runt resonans för “High Z” och “Low Z” fällor

Figur 10 och 11 ovan visar impedansens realdelar och förhållandet mellan Q-värdena för de “High Z” och “Low Z” traps som analyserats ovan. Parallellresonansfrekvensen är approximativt

$$f_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{Z_0 \frac{300V}{\Lambda \cdot L}} \quad (Z_0 \text{ i Ohm, } \Lambda \text{ i meter, } L \text{ i mikrohenry)}$$

Koaxtraps – en sammanfattning

Både ”High Z” och “Low Z” fällorna får sin första parallellresonans vid samma frekvens, men ”High Z” fällan har ett L/C förhållande som är approximativt fyra gånger “Low Z” fällans. Den senare har en tydlig serieresonans vid den frekvens där den elektriska längden hos koaxstumpen är en kvartsvåg.

De beräknade impedanserna vid frekvenser ovanför ≈ 40 MHz för 5.1 MHz vågfällan är något approximativa p.g.a. de oundvikliga ströeffekterna från variationer i uppbyggnad och ledningsdragning i ett praktiskt fall. En 10 pF strökapacitans över koaxspolen har tagits med i impedansberäkningarna. Utan strökapacitans ökar den beräknade resonansfrekvensen någon procent. Vid höga frekvenser kan de beräknade impedansvärdena påverkas av strålning från koaxialkabelns ytterledare – där är inte fällans dimensioner försumbara jämfört med våglängden.

Vågfällans Q bestäms till stor del av förlustfaktorn hos koaxialkabeln och påverkas mindre av Q hos den induktor som bildas av kabelskärmen; det senare Q-värdet kan i allmänhet göras ganska högt ($Q > 200$). En preliminär slutsats är att en koaxialvågfälla i allmänhet alltid har högre förluster än en LC parallellkrets med diskreta L- och C-komponenter med god kvalitet så länge man använder kablar typ RG8, RG213 eller RG59, vilka alla har egendämpningar av ordningen 0.6 – 1.2 dB/100 fot. Vill man åstadkomma höga Q-värden hos koaxialvågfällor bör man använda utpräglade lågförlustkablar, t.ex. kablar för VHF- eller UHF-applikationer. En intressant erfarenhet under förarbetet till denna artikel var att flera av de program som finns tillgängliga på Internet (“coaxtrap.exe” etc) verkar försumma inverkan av kabeldämpningen och ger för höga Q-värden. En intressant kommentar om detta har publicerats av VK1OD, se <http://www.vk1od.net/coaxtrap/index.htm>. Några som skrivit artiklar om koaxialvågfällor har också ”gått i fällan” att försumma kabelns transmissionsledningsegenskaper – detta leder till felaktiga slutsatser, se t.ex. artikeln <http://www.arrl.org/qex/Mueller.pdf> (publicerad i QEX), där författaren tyvärr kommer fram till en oriktig ekvivalent krets.

Jan Gunmar SMOAQW Juli 2007