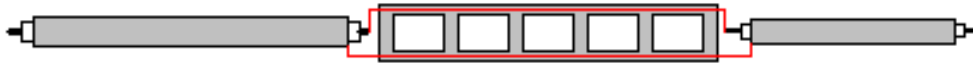


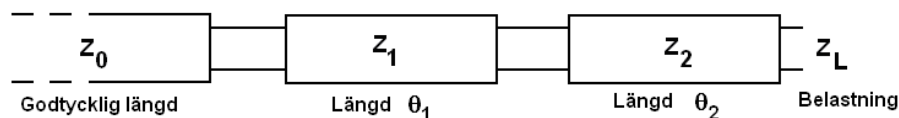
Kretsmodeller för transmissionsledningar – anpassning och impedanstransformering med kaskadkopplade stubar

Av: Jan Gunmar, SM0AQW



Algebraiska analyser av nät med transmissionsledningar är ofta besvärliga – mycket matematik växer snabbt fram ur några få ”enkla” komponenter – men de kan ofta avslöja intressanta egenskaper hos kretsen. Den här artikeln ger några exempel på hur man kan analysera kaskadkopplade stubar (”seriestubar”) för anpassning av matarledningar och ger också några formler för praktisk konstruktion. Förhoppningsvis kan artikeln inspirera några läsare att pröva metoderna på sina egna konstruktionsidéer när de vill ta reda på ”hur det egentligen fungerar”.

Det finns mycket litteratur med teori och råd om antennenpassning, men kaskadkopplade stubar eller ”seriestubar” (figur 1) behandlas ganska sparsamt.



Figur 1

Kaskadkopplade stubar kan vara ett intressant alternativ till anpassningsnät uppe vid antennen och/eller en anpassningsenhet efter sändaren eftersom en kaskadsektion ofta kan göras ganska kort och bidrar föga till totalförlusten i matarledningen.

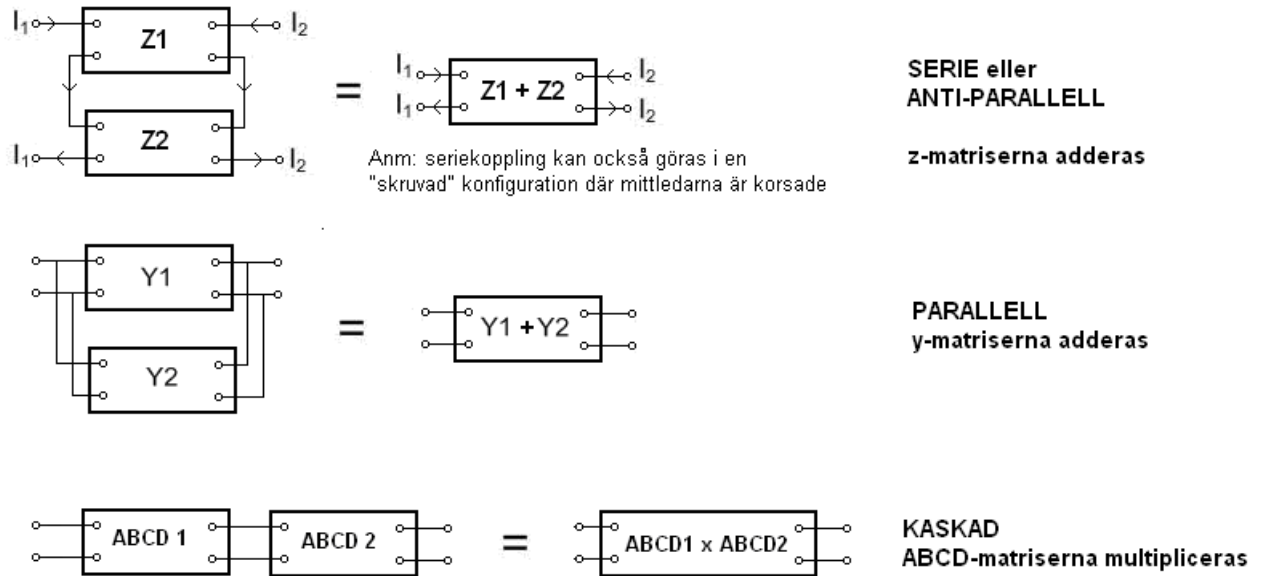
När man anpassar sändaren till antennen bör ambitionen vara att uppnå en ”flat” ledning, d.v.s. ett ståendevågförhållande som är lika med 1.0. Detta är inte alltid möjligt, men av effektivitetsskäl bör man då eftersträva att ståendevågförhållandet är så lågt som möjligt över hela eller merparten av matarledningen, i synnerhet när matarledningen är lång, räknat i våglängder.

En ”ärkety” av kaskad- eller seriestuben är ju kvartsvågstransformatorn, där den ena stuben i figuren ovan har längden noll och den andra är en elektrisk kvartsvåg. Populariteten hos kvartsvågstransformatorn beror säkert på att dimensioneringsformeln inte fordrar så mycket beräkningar, men den fysiska längden hos en kaskadsektion kan faktiskt göras mindre och t.o.m. mycket mindre än för en kvartsvågssektion och man får dessutom större frihet i valet mellan olika ledningstyper och -impedanser. Vid konstruktion av ordinära kortvågsantenner på måttligt avstånd från sändaren kanske inte besparingen i längd spelar någon större roll, men den kan vara viktigt t.ex. vid konstruktion i striplineteknik där man själv kan bestämma impedansen hos ledningar under konstruktionsarbetet. Då kan det bli möjligt att optimera en anpassningslänk av kaskadtyp både med avseende på bandbredd, utrymme och förluster.

Denna artikel ger exempel på hur man analyserar stubanpassning med algebraiska metoder. Användning av Smithdiagrammet för att analysera kaskadkopplade stubar behandlas inte här, men hur diagrammet tillämpas på kaskadkoppling visas utförligt i *ARRL Antenna Book*, ed. 19, page 28-13 [2].ref [2]. En bra introduktion till kaskadkopplade stubar ges av *L.B. Cebik* [2].

Terminologi

En enkel stub av en transmissionsledning är en fyrpol som är symmetrisk och bilateral – ”den ser likadan ut elektriskt från endera änden”. För fyrpoler används vanligen termerna ”serie-, parallell- och kaskadkoppling” i facklitteraturen som i bilden nedan:



Termen ”seriekoppling” kan förefalla tvetydig för en del och termen ”kaskadkoppling” har därför använts här, men ”seriekoppling” används ofta och borde inte orsaka mycken förvirring.

Analys av en kaskadsektion

Två stubar av transmissionsledning med elektriska längderna θ_1 och θ_2 radianer och karakteristiska impedanserna Z_1 och Z_2 resp. är kaskadkopplade, se figure 1. Stubarna antas vara förlustfria.

Två grundfrågor är;

- Om en last Z_L ansluts vid den vänstra utgången, vilka relationer ska gälla mellan Z_1 , Z_2 och de elektriska längderna θ_1 och θ_2 för att ståendevägförhållandet på ledningen Z_0 ska bli 1, d.v.s. anpassning uppstå?
- Finns det en kretsekvivalent bestående av en enda stub och vad är i så fall dess elektriska längd och impedans?

Problemen kan sangripas på flera sätt. En analytiska ”råstyrkemotod” är att använda ABCD matriserna $\mathbf{M1}$ och $\mathbf{M2}$ för stubarna Z_1 och Z_2 (figur 1). Matriserna kan skrivas

$$\mathbf{M1} := \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & i \cdot Z_1 \cdot \sin(\theta_1) \\ \frac{i}{Z_1} \cdot \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} \quad \mathbf{M2} := \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & i \cdot Z_2 \cdot \sin(\theta_2) \\ \frac{i}{Z_2} \cdot \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$\mathbf{M1}$ och $\mathbf{M2}$ är bilaterala, men de kommuterar inte, d.v.s. $\mathbf{AM} \cdot \mathbf{BM} - \mathbf{BM} \cdot \mathbf{AM} \neq 0$, utom i det ointressanta fallet då $Z_1 = Z_2$. En kaskadsektion kan i allmänhet inte ersättas med en enda ekvivalent stub av transmissionsledning därför att kaskaden är inte bilateral. Detta innebär bl.a. att vågimpedanserna sedda från höger och vänster sida inte är lika. Man kan göra tankeexperimentet att ansluta en ideal transformator i kaskad med $\mathbf{M1} \cdot \mathbf{M2}$ - sektionen. ABCD matriserna för den ideala transformatorn med omsättningstalet x och dess invers är:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \quad \text{invers}$$

ABCD- matrisen för produkten $\mathbf{M1} \cdot \mathbf{M2} \cdot \mathbf{T}$ blir (sett från vänster):

$$\mathbf{M1} \cdot \mathbf{M2} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \left(\cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) - Z_1 \cdot \frac{\sin(\theta_1)}{Z_2} \cdot \sin(\theta_2) \right) \cdot x \cdot \frac{(i \cos(\theta_1) \cdot Z_2 \cdot \sin(\theta_2) + i Z_1 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2))}{x} \\ \left(\frac{i}{Z_1} \cdot \sin(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) + i \cdot \frac{\cos(\theta_1)}{Z_2} \cdot \sin(\theta_2) \right) \cdot x \cdot \frac{\left(\frac{-1}{Z_1} \cdot \sin(\theta_1) \cdot Z_2 \cdot \sin(\theta_2) + \cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) \right)}{x} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Sett från the höger blir ABCD-matrisen:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ x & x \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{M1} \cdot \mathbf{M2}) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{x} \cdot \left(\cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) - Z_1 \cdot \frac{\sin(\theta_1)}{Z_2} \cdot \sin(\theta_2) \right) \cdot \frac{(i \cos(\theta_1) \cdot Z_2 \cdot \sin(\theta_2) + i Z_1 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2))}{x} \\ x \cdot \left(\frac{i}{Z_1} \cdot \sin(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) + i \cdot \frac{\cos(\theta_1)}{Z_2} \cdot \sin(\theta_2) \right) \cdot x \cdot \left(\frac{-1}{Z_1} \cdot \sin(\theta_1) \cdot Z_2 \cdot \sin(\theta_2) + \cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) \right) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Observera att inversen av \mathbf{T} måste användas i (3) eftersom \mathbf{T} inte är bilateral

De två matrisprodukterna (2) och (3) blir identiska och bilaterala och är ekvivalenta med en enkel stub om följande samband gäller:

$$\frac{\left(\frac{-1}{Z_1} \cdot \sin(\theta_1) \cdot Z_2 \cdot \sin(\theta_2) + \cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) \right)}{x} = x \cdot \left(\cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) - Z_1 \cdot \frac{\sin(\theta_1)}{Z_2} \cdot \sin(\theta_2) \right) \quad (4)$$

vilket då ger omsättningstalet x för den ideala transformatorn:

$$x = \pm \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \tan(\theta_1) \cdot \tan(\theta_2) \right)}{\left(1 - \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \tan(\theta_1) \cdot \tan(\theta_2) \right)}} \quad (5)$$

Definiera nu en tänkt ekvivalent enkel stub Z_{12} , som är bilateral och har en (approximativ) fysikalisk motsvarighet så länge x är reellt. ABCD-matrisen \mathbf{Z}_{12} är:

$$\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{M1} \cdot \mathbf{M2} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{M2} \cdot \mathbf{M1})$$

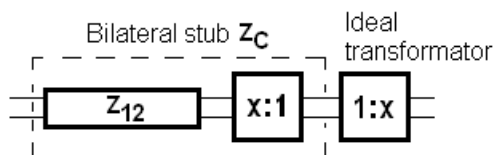
Efter substitutionen $k = Z_1/Z_2$ kan den karakteristiska impedansen Z_C hos den ekvivalenta enkla stuben skrivas:

$$Z_{12}^2 = k \cdot Z_2^2 \cdot \frac{\left(\frac{\tan(\theta_2)}{k} + \tan(\theta_1) \right) \cdot (1 - k \cdot \tan(\theta_1) \cdot \tan(\theta_2))}{\left(1 - \frac{1}{k} \cdot \tan(\theta_1) \cdot \tan(\theta_2) \right) \cdot \left(\frac{\tan(\theta_1)}{k} + \tan(\theta_2) \right)} \quad (6)$$

Den elektriska längden Θ hos stuben Z_C kan beräknas ur:

$$\cos(\Theta)^2 = \cos(\theta_1)^2 \cdot \cos(\theta_2)^2 \cdot (1 - k \cdot \tan(\theta_1)) \cdot \left(1 - \frac{1}{k} \cdot \tan(\theta_2) \right) \quad (7)$$

Två kaskadkopplade transmissionsledningar med skilda impedanser Z_1 och Z_2 är ekvivalent med med en enkel bilateral transmissionsledning med impedansen Z_C i kaskad med en ideal transformator med omsättningen $1:x$ men ekvivalensen är bara approximativt realiserbar när x är reellt, se figur 2. Ekvivalensen begränsas av att en ideal transformator bara är approximativt realiserbar.



Figur 2

De karakteristiska impedanserna sett från vänster och höger ända av kaskad +transformator är olika stora. För vågor som rör sig från vänster till höger är impedansen $Z_C \cdot x$; för vågor i motsatt riktningen blir impedansen Z_C/x . När x blir imaginär blir impedansen Z_C också imaginär och det finns ingen approximativ fysisk ekvivalent

Analysen ovan visar begränsningarna om man vill ersätta kaskadsektionen med andra komponenter. Med givna värden på θ_1 , θ_2 och k , är det förhållandevis enkelt att beräkna Θ och Z_{12} . Försök att beräkna θ_1 och θ_2 när Z_C , Θ och k är givna leder till en ekvation av hög ordning som är arbetsam att lösa. Ekvationerna (5) och (6) verkar endast vara användbara för att bestämma Z_{12} , Θ och x när de övriga parametrarna är givna. En approximativ fysisk ekvivalent Z_C existerar bara om följande villkor är uppfyllda:

$$\frac{Z_2}{Z_1} \cdot \tan(\theta_1) \cdot \tan(\theta_2) < 1 \quad \text{och} \quad \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \tan(\theta_1) \cdot \tan(\theta_2) < 1$$

eller

$$\frac{Z_2}{Z_1} \cdot \tan(\theta_1) \cdot \tan(\theta_2) > 1 \quad \text{och} \quad \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \tan(\theta_1) \cdot \tan(\theta_2) > 1 \quad (8)$$

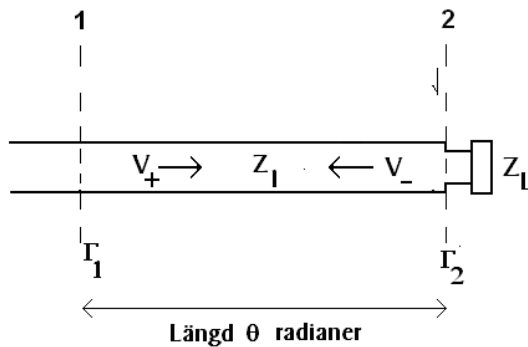
Analys av en kaskadsektion

Det finns åtminstone tre intressanta fall när man konstruerar en anpassningssektion med kaskadkopplade stubar:

- Med givna värden på källimpedans Z_0 och last Z_L , finn Z_1 , Z_2 , θ_1 och θ_2 . Problemet har många lösningar eftersom valet av parametern $k = Z_1/Z_2$ är fritt. I praktiken är valet begränsat av vilka standardimpedanser som är tillgängliga för Z_1 och Z_2 , inräknat möjligheten att skapa nya ledningsimpedanser genom att parallell- och antiparallellkoppla stubar, men det är färre restriktioner om man konstruerar anpassningsnät i striplineteknik.
- Givna Z_0 och Z_L , sök en dimensionering som minimerar summan $\theta_1 + \theta_2$ av de elektriska längderna hos Z_1 och Z_2 . Problemet är aktuellt när man konstruerar i stripline designing och tillgänglig kretsytta är begränsad. Problemet har behandlats av *Doug Miron*, see [9]
- Givna Z_0 och Z_L , finn ett val av Z_1 och Z_2 som minimerar känsligheten för parametervariationer eller förlusterna hos anpassningsanordningen.

Några grundbegrepp – reflektionsfaktor och reflektionskoefficient

Analysen ovan med ekvationerna (1) – (7) innebär principiellt att man beräknar strömmar och spänningar vid in- och utgångarna till nätet. Relationen mellan dessa storheter bestäms ju av ABCD-matrisen för nätet. Genom att sedan dividera spänning med ström i ett givet snitt kan man beräkna ledningens våg- eller inimpedans i snittet. Ett alternativt angreppssätt är att betrakta ledningen som ett medium för vågutbredning i stället för att beräkna spänning och ström vid olika tvärsnitt av ledningen och använda begreppen reflektionsfaktor Γ (stora gamma) och reflektionskoefficienten ρ (rho). Läsaren hänvisas till *Orfanidis* bok *Electromagnetic Waves and Antennas* [3], kapitel 9.7 för en mer detaljerad genomgång av dessa begrepp. Reflektionsfaktorn Γ är förhållandet mellan direkt våg V och reflekterad våg V_- på en missanpassad ledning, se figur (A) nedan:



$$\Gamma = \frac{V_-}{V_+}$$

Figur A

Ledningen har den elektriska längden θ , karakteristiska impedansen Z_1 och den är belastad med impedansen Z_L

I snittet 2 (vid belastningen Z_L) är *reflektionsfaktorn* Γ_2

$$\Gamma_2 = \frac{Z_L - Z_1}{Z_L + Z_1}$$

Reflektionskoefficienten ρ_1 på stuben Z_1 intill lasten Z_L är lika med Γ_2 . Γ_2 kan då skrivas

$$\Gamma_2 = \frac{Z_L - Z_1}{Z_L + Z_1} = |\rho_1| \cdot e^{j \cdot \theta_L}$$

Fasvinkeln θ_L för Γ_2 är lika med vinkeln

$$\theta_L = \arg\left(\frac{Z_L - Z_1}{Z_L + Z_1}\right)$$

Reflektionsfaktorn Γ_1 vid snittet 1 är fasförskjuten 2θ radianer relativt Γ_2 :

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 \cdot e^{-j \cdot 2\theta}$$

och ståendevågförhållandet på ledningen är S:

$$S = \frac{1 + |\Gamma_1|}{1 - |\Gamma_1|} = \frac{1 + |\Gamma_2|}{1 - |\Gamma_2|} = \frac{1 + |\rho_1|}{1 - |\rho_1|}$$

Facklitteraturen är ibland något oklar om skillnaden mellan reflektionskoefficienten ρ och reflektionsfaktorn Γ . Det finns ett visst överlapp mellan begreppen. Enklast är att se ρ som ett mått på anpassningen/SVF mot lasten och Γ som ett mått på den reflekterade vågens storlek och fasläge relativt den direkta vågen. Fasläget hos Γ varierar längs transmissionsledningen, medan ρ är en konstant (reell eller komplex) för ett stycke ledning.

Belastningsimpedansen Z_L är komplex

Att beräkna θ_1 och θ_2 i slutet form genom att lösa kretsekvationerna när Z_1 , Z_2 , Z_L är givna och Z_L är en komplex impedans $R + jX$ är minst sagt komplicerat, och eventuellt omöjligt, men en elegant metod där man använder reflektionsfaktorer och – koefficienter beskrivs av *Orfanidis* i hans bok *Electromagnetic Waves och Antennas* [3]. Lösningar till problemet har också publicerats av *Regier* [4], [5] och [6] och *Weller* [8]. Kapitel 11 i *Orfanidis* bok innehåller en ganska heltäckande samling teori och konstruktionsformler för kaskad- och parallellanpassning med stubar med flera MatLab exempel. MatLab-exemplen är ganska lätta att förstå och kan i många fall skrivas om för andra beräkningspråk (t.ex. BASIC eller C++) eller användas direkt i MatLab-liknande program, t.ex. SciLab, see [12]). Analysen som beskrivs av *Orfanidis* visas nedan, figur 3:

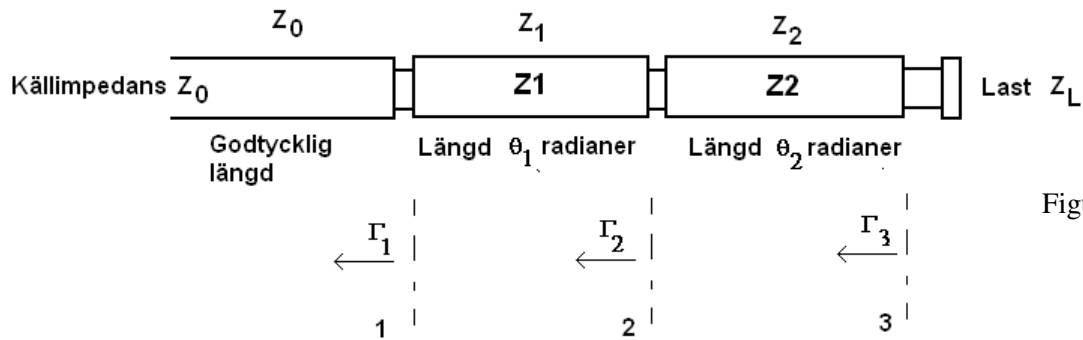


Figure 3

Antag att Z_0 , Z_1 , Z_2 och $Z_L = R + jX$ är kända. Börja med att definiera reflektionskoefficienterna för de tre stubarna 1, 2 och 3 i kaskadsektionen:

$$\rho_1 = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \quad \rho_2 = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (9)$$

Reflektionskoefficienterna ρ_1 och ρ_2 är reella men ρ_3 är komplex och kan skrivas:

$$\rho_3 = \left| \frac{Z_L - Z_2}{Z_L + Z_2} \right| \cdot e^{j \cdot \theta_3}$$

Fasvinkeln θ_3 bestäms direkt av: $\theta_3 = \arg \left(\frac{Z_L - Z_2}{Z_L + Z_2} \right) \quad (10)$

och då är

$$\Gamma_3 = \left| \frac{Z_L - Z_2}{Z_L + Z_2} \right| \cdot e^{j \cdot \theta_3} = |\rho_3| \cdot e^{j \cdot \theta_3} \quad (11)$$

Reflektionsfaktorn vid anslutningen till lasten (sektion 3) är Γ_3 :

$$\Gamma_3 = \left| \frac{Z_L - Z_2}{Z_L + Z_2} \right| \cdot e^{j \cdot \theta_3} = |\rho_3| \cdot e^{j \cdot \theta_3} \quad (12)$$

Reflektionsfaktorn på Z_2 just till höger om snittet 2 är då

$$|\rho_3| \cdot e^{j \cdot \theta_3} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \theta_2} \quad (13)$$

Reflektionsfaktorn på Z_2 vid dess vänstra ände blir

$$\Gamma_2 = \frac{\rho_2 + |\rho_3| \cdot e^{j \cdot \theta_3} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \theta_2}}{1 + \rho_2 \cdot \left(|\rho_3| \cdot e^{j \cdot \theta_3} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \theta_2} \right)} \quad (14)$$

Reflektionsfaktorn vid högra änden av Z_1 vid snittet 1 är:

$$\Gamma_1 = \frac{\rho_1 + \Gamma_2 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \theta_1}}{1 + \rho_1 \cdot \Gamma_2 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \theta_1}} \quad (15)$$

Villkoret för anpassning är $\Gamma_1 = 0$, vilket ger

$$\rho_1 + \Gamma_2 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \theta_1} = 0 \quad (16)$$

Reflektionskoefficienten på Z1 är reell och då är $\rho_1^2 = |\Gamma_2|^2$ och vi får följande ekvation:

$$\left| \frac{\rho_2 + |\rho_3| \cdot e^{j \cdot \theta_3} \cdot e^{-j \cdot 2\theta_2}}{1 + \rho_2 \cdot (|\rho_3| \cdot e^{j \cdot \theta_3} \cdot e^{-j \cdot 2\theta_2})} \right|^2 = \rho_1^2 \quad (17)$$

Vänstra ledet av (17) kan förenklas och ekvationen blir:

$$\rho_1^2 = \frac{\rho_2^2 + (|\rho_3|)^2 + 2 \cdot \rho_2 \cdot |\rho_3| \cos(2 \cdot \theta_2 - \theta_3)}{1 + 2 \rho_2 \cdot |\rho_3| \cos(2 \cdot \theta_2 - \theta_3) + \rho_2^2 \cdot (|\rho_3|)^2} \quad (18)$$

och lösningen för θ_2 är:

$$\theta_2 = \frac{\theta_3}{2} + \arccos \left[\pm \sqrt{\frac{[1 - \rho_2 \cdot (|\rho_3|)]^2 \cdot \rho_1^2 - (\rho_2 - |\rho_3|)^2}{4 [\rho_2 \cdot |\rho_3| \cdot (\rho_1^2 - 1)]}} \right] \quad (19)$$

Ett villkor för att θ_2 ska bli reell är att uttrycket inom kvadratroten är positivt. Lägg märke till att man får två lösningar för θ_2 ; om den ena lösningen är negativ lägg då till π or 2π för att få ett positivt värde.

När nu θ_2 beräknats kan θ_1 erhållas genom att först beräkna Γ_2 med

$$\Gamma_2 = \frac{\rho_2 + |\rho_3| \cdot e^{j \cdot \theta_3} \cdot e^{-j \cdot 2\theta_2}}{1 + \rho_2 \cdot (|\rho_3| \cdot e^{j \cdot \theta_3} \cdot e^{-j \cdot 2\theta_2})} \quad (20)$$

Med hjälp av anpassningsvillkoret $\rho_1 + \Gamma_2 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \theta_1} = 0$

kan man beräkna θ_1 ur

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \cdot \arg \left(\frac{-\rho_1}{\Gamma_2} \right) \quad (21)$$

Efter substitution av Γ_2 from (20) erhålls till slut θ_1 : (θ_2 och θ_3 måste beräknas innan θ_1 kan bestämmas):

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \cdot \text{atan} \left[\frac{[\rho_2 + |\rho_3| \cdot \cos(2 \cdot \theta_2 - \theta_3) + \rho_2^2 \cdot |\rho_3| \cdot \cos(2 \cdot \theta_2 - \theta_3) + \rho_2 \cdot (|\rho_3|)^2]}{|\rho_3| \cdot \sin(2 \cdot \theta_2 - \theta_3) \cdot (\rho_2^2 - 1)} \right] \quad (23)$$

Frank A. Regier, OD5CG, har publicerat lösningar i slutna form för fallet när $Z_2 = Z_0$ och Z_L är komplex, se ref. [2], [4], [5] och [6]. En tidig early artikel av B. Bramham om kaskadkopplade koaxialstubar som impedanstransformatörer är ref. [11]. Någon slutna lösning av fallet då valet av Z_0 , Z_1 , Z_2 och Z_L är helt fritt är inte känd och är eventuellt omöjlig.

Belastningen Z_L är reell

När Z_L är reell kan θ_1 och θ_2 beräknas analytiskt genom att sätta $\theta_3 = 0$ in ekvationerna (19) och (23). En alternativ "råstyrkemethod" kan också användas. Då bildar man ABCD-matrisen \mathbf{M}_3 för en belastad kaskadsektion $\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{Z}_L$:

$$\mathbf{M3} = \mathbf{M1} \cdot \mathbf{M2} \cdot \mathbf{Z_L} \quad \text{where} \quad \mathbf{Z_L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_L} & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{M3}$ blir:

$$\mathbf{M3} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) - Z_1 \cdot \frac{\sin(\theta_1)}{Z_2} \cdot \sin(\theta_2) + \frac{(i \cos(\theta_1) \cdot Z_2 \cdot \sin(\theta_2) + i Z_1 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2))}{Z_L} & i \cos(\theta_1) \cdot Z_2 \cdot \sin(\theta_2) + i Z_1 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) \\ \frac{i}{Z_1} \cdot \sin(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) + i \cdot \frac{\cos(\theta_1)}{Z_2} \cdot \sin(\theta_2) + \frac{\left(\frac{-1}{Z_1} \cdot \sin(\theta_1) \cdot Z_2 \cdot \sin(\theta_2) + \cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2)\right)}{Z_L} & \frac{-1}{Z_1} \cdot \sin(\theta_1) \cdot Z_2 \cdot \sin(\theta_2) + \cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) \end{bmatrix}$$

Två ekvationer kan nu skrivas ner: ingångsimpedansen till kaskaden är reell och lika med Z_0 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\left(\cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) - Z_1 \cdot \frac{\sin(\theta_1)}{Z_2} \cdot \sin(\theta_2) \right)}{\left(\frac{-1}{Z_1} \cdot \sin(\theta_1) \cdot Z_2 \cdot \sin(\theta_2) + \cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) \right)} \cdot Z_L &= Z_0 \\ \frac{\left(\cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) - Z_1 \cdot \frac{\sin(\theta_1)}{Z_2} \cdot \sin(\theta_2) \right)}{\left(\frac{-1}{Z_1} \cdot \sin(\theta_1) \cdot Z_2 \cdot \sin(\theta_2) + \cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) \right)} \cdot Z_L &= \frac{(i \cos(\theta_1) \cdot Z_2 \cdot \sin(\theta_2) + i Z_1 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2))}{Z_L \cdot \left(\frac{i}{Z_1} \cdot \sin(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) + i \cdot \frac{\cos(\theta_1)}{Z_2} \cdot \sin(\theta_2) \right)} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Till slut erhålls sambanden som behövs för att beräkna θ_1 och θ_2 när Z_L , Z_1 och Z_2 är givna

$$\boxed{\begin{aligned} \tan(\theta_1)^2 &= \frac{(Z_L - Z_0) \cdot (Z_L \cdot Z_0 - Z_2^2) \cdot Z_1^2}{(-Z_1^2 \cdot Z_L + Z_0 \cdot Z_2^2) \cdot (Z_L \cdot Z_0 - Z_1^2)} \\ \tan(\theta_2)^2 &= \frac{(-Z_L + Z_0) \cdot (Z_L \cdot Z_0 - Z_1^2) \cdot Z_2^2 \cdot Z_2^2}{(Z_2^2 - Z_L \cdot Z_0) \cdot (-Z_1^2 \cdot Z_L + Z_0 \cdot Z_2^2)} \end{aligned}} \quad (26)$$

Reella lösningar för θ_1 och θ_2 existerar bara när högra leden av de båda ekvationerna (26) är positiva. Detta ger villkoren

$$\begin{aligned} \frac{Z_0^2}{Z_1} \leq Z_L \leq \frac{Z_1^2}{Z_0} & \quad \text{if } Z_1 > Z_0 \\ \frac{Z_1^2}{Z_0} \leq Z_L \leq \frac{Z_0^3}{Z_1^2} & \quad \text{if } Z_1 < Z_0 \end{aligned} \quad (27)$$

Förenklade fall

Det finns tre fall som medger förenklade formler: A/ $Z_2 = Z_0$, B $\theta_1 = \theta_2$ och ett tredje fall C/ som är A/ och B/ kombinerade: $Z_2 = Z_0$ och $\theta_1 = \theta_2$ (se 12th-vågstransformatorn nedan):

A/ När $Z_2 = Z_0$ är formlerna för $\theta_1 = \theta_2$

$$\tan(\theta_1)^2 = \frac{-Z_1^2 \cdot [(Z_L - Z_0)^2 \cdot Z_0]}{(Z_1^2 \cdot Z_L - Z_0^3) \cdot (Z_L \cdot Z_0 - Z_1^2)}$$

$$\tan(\theta_2)^2 = -Z_0 \cdot \frac{(Z_L \cdot Z_0 - Z_1^2)}{(Z_1^2 \cdot Z_L - Z_0^3)}$$
(28)

Sätter man $Z_1 = m \cdot Z_0$ fås det litet enklare uttrycken:

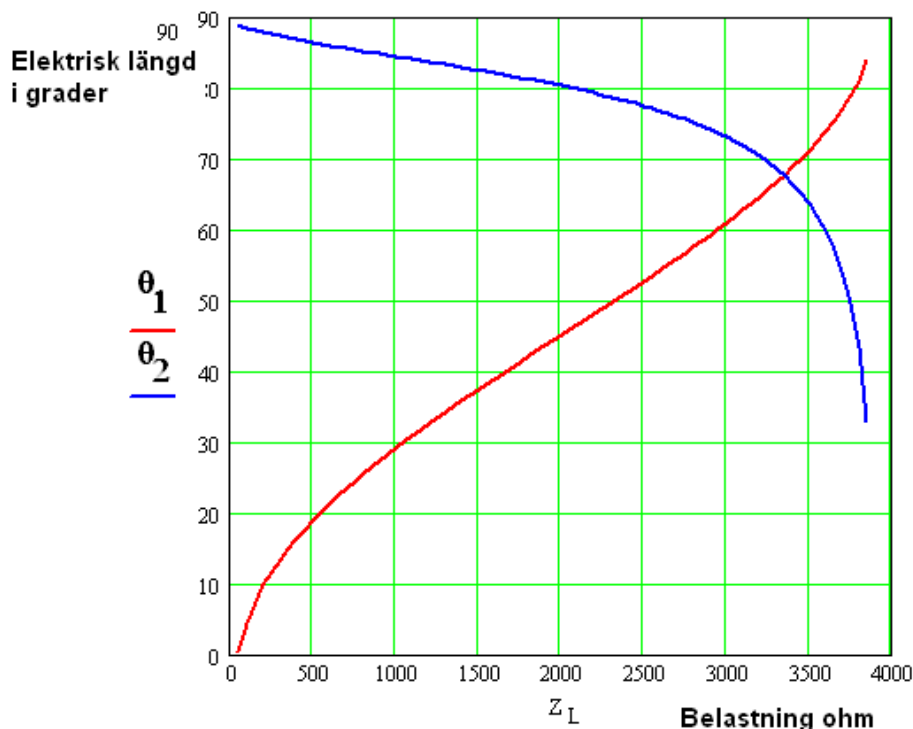
$$\tan(\theta_1)^2 = m^2 \cdot \frac{(Z_L - Z_0)^2}{(m^2 \cdot Z_L - Z_0) \cdot (-Z_L + m^2 \cdot Z_0)}$$

$$\tan(\theta_2)^2 = \frac{(-Z_L + m^2 \cdot Z_0)}{(m^2 \cdot Z_L - Z_0)}$$
(29)

När Z_L och Z_0 är givna är konstruktionsgången följande: välj ett värde hos m som är praktiskt och beräkna sedan de elektriska längderna θ_1 och θ_2 . Den fysiska längden L för en stub erhålls genom att omvandla θ till våglängder för den aktuella frekvensen och sedan multiplicera med hastighetsfaktorn V_f för den valda ledningstypen.

Fysisk längd:
$$L = \frac{\theta \cdot \lambda \cdot V_f}{2 \cdot \pi}$$

Det är ofta enklast och lämpligt att välja ett lätt tillgängligt standardvärde för Z_1 och sätta $Z_2 = Z_0$ när lasten är resistiv eller nästan resistiv. Om Z_1/Z_0 är tillräckligt stort (t.ex. $Z_0 = 50$ och $Z_1 = 300$ eller 450 ohm) kan ett ganska stort område av belastningsresistanser anpassas, se ekvation (28). Diagrammet i figur 4 visar ett av lösningssparen till ekvationerna (28) när $Z_1 = 450$ ohm. Området för Z_L är ganska stort, från mindre än 10 till ca 3800 ohm, men L_2 ändras snabbt när Z_L blir större än ca 3000 ohm, vilket ger hög figur 4 toleranskänslighet, varför man inte bör använda värden på Z_L som är större än ca 2500 ohm.



Figur 4

Det är möjligt att 450 ohm är ett onödigt högt värde för Z_1 . Om denna stub tillverkas av två 50 eller 75 ohm ledningar i anti-parallell vilket ger en impedans av Z_1 på 100 eller 150 ohm kan man erhålla ett anpassningsområde av 17 – 450 ohm, se ekvation (27)..

B/ När $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ blir ekvationerna

$$\tan(\theta)^2 = Z_2^2 \cdot \frac{[Z_L \cdot (Z_L - Z_0)]}{(-Z_2^4 + Z_0 \cdot Z_L^3)}$$

$$Z_1 = \frac{Z_L}{Z_2} \cdot Z_0$$
(30)

Man kan normalisera (30) mot Z_0 med parametrarna $k = Z_1/Z_2$ och $N = Z_3/Z_0$ och ekvation (30) förenklas då till (31):

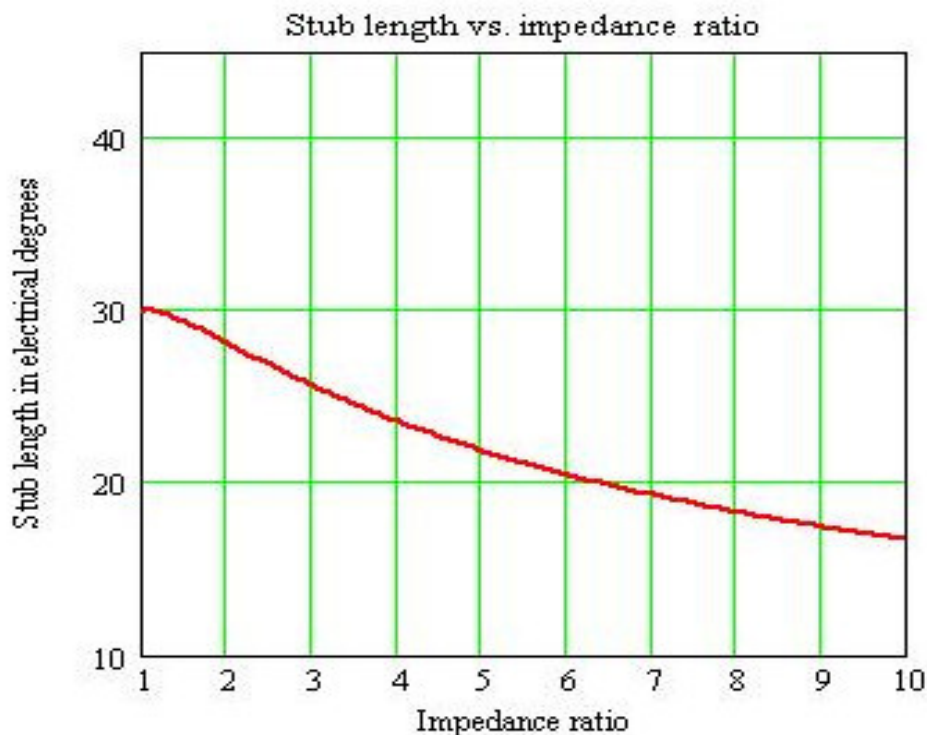
$$\theta = \text{atan} \left[\sqrt{k \cdot \frac{(N-1)}{(N \cdot k^2 - 1)}} \right]$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = Z_0 \cdot Z_3$$
(31)

Ekvation (31) är “spegelsymmetrisk” m.a.p. den singulära punkten $N = k = 1$. Om man ersätter N och k med $1/N$ och $1/k$ resp. erhåller man samma uttryck för θ som förut – operationen är likvärdig med att byta plats för Z_1 och Z_2 .

C/ $\theta_1 = \theta_2$ och $Z_2 = Z_0$ - “Tolftedelstransformatorn”

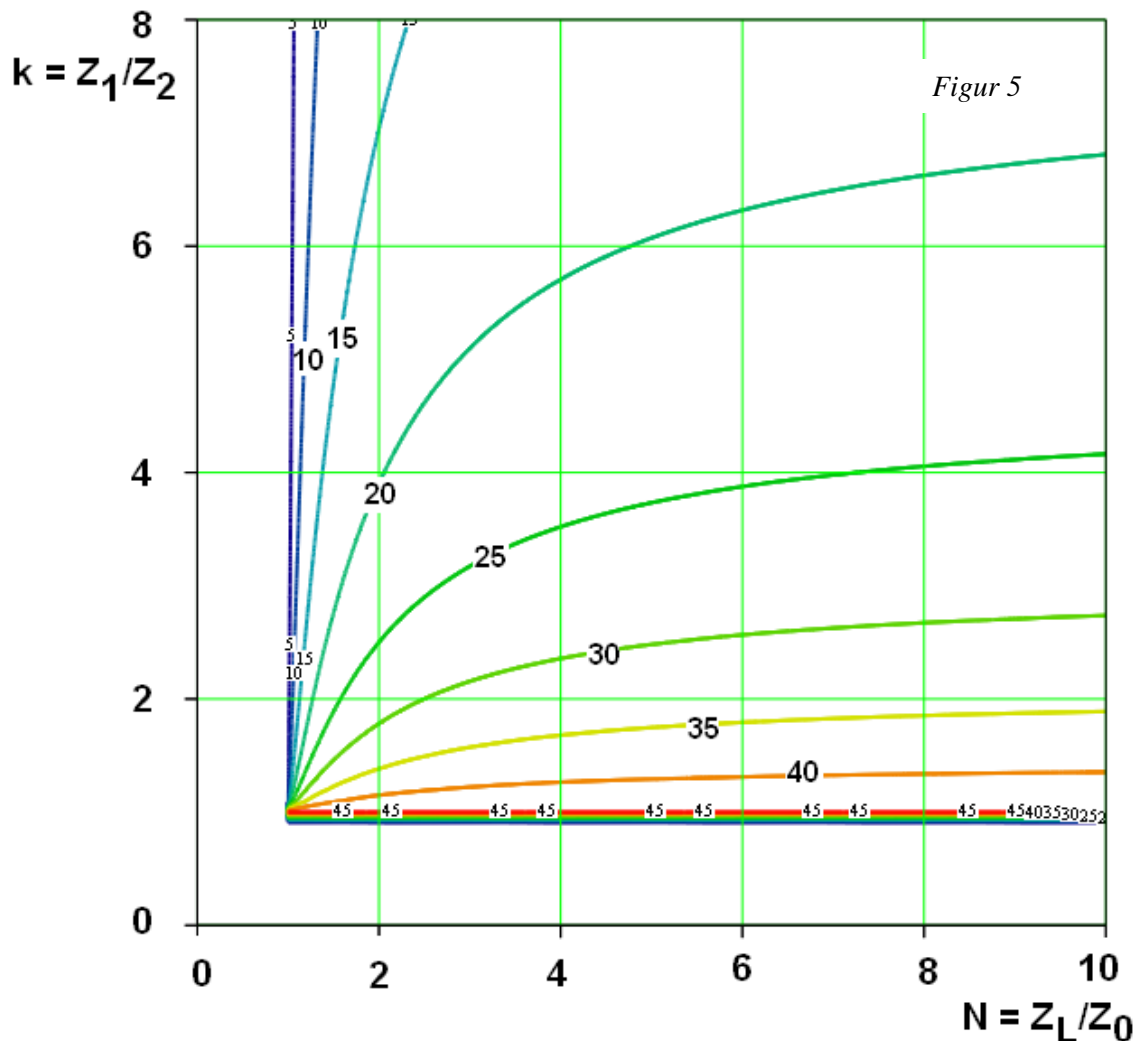
En ganska välkänd tillämpning är fallet **C/** som brukar kallas “Tolftedelstransformatorn” [7]. Denna är en kaskadsektion där de två stubarna båda är approximativt 30 elektriska grader eller en tolfedels våglängd långa.



Tolftedelstransformatorn har ganska stor spännvidd i omsättningstal och använder villkoret $N = k$ i ekvation (31) ovan, men det korrekta värdet för Z_1 kan ibland vara svårt att realisera praktiskt. Figur 5 visar ett diagram för praktisk konstruktion av en tolftedelstransformator. Den elektriska längden blir faktiskt 30° bara för det triviala omsättningstalet 1:1. och blir något mindre för större N .

Impedansen Z_1 får ofta ett värde som inte är en standard ledningsimpedans, men kan approximeras genom parallell- eller antiparallellkoppling av två eller flera stubar av standardledning. Eftersom stubarna är ganska korta bör detta inte ge större viktproblem. En 26 ohm ledning kan t.ex. tillverkas genom att parallellkoppla två lika 52 ohms stubar och det finns många andra användbara kombinationer. Några exempel på användning av tolftedelstransformatorn ges av *Emerson* i ref. [7].

Beräkning av en anpassningssektion när Z_L är reell och $Z_2 \neq Z_0$



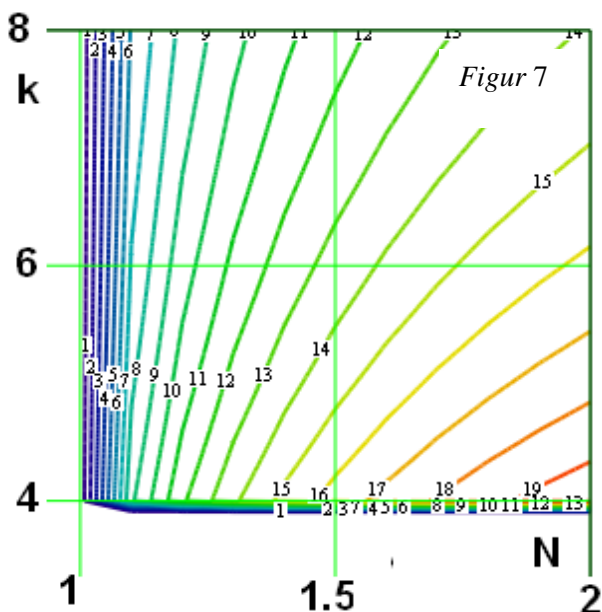
Figur 6 är ett konturdiagram av ekvation (31) som kan användas som konstruktionshjälp för att bedöma dimensionerna hos en kaskadsektion där de två stubarna har samma elektriska längd θ men olika impedanser. Konturlinjerna visar θ i grader för olika kombinationer av k och N i ekvation (31). Man kan se att tolftedelstransformatorn ovan inte är unik; det finns många andra kombinationer av impedanser och längder som kan ge samma omsättningstal N .

Toleranser – kommentarer till figur 6

Mycket korta stubar Z_1 och Z_2 (elektrisk längd < 20 grader) kan bara ge en måttlig omsättning. "Känsligheten" $\Delta N/\Delta k$ är låg för högre k värden; N ändras långsamt med k vilket innebär att

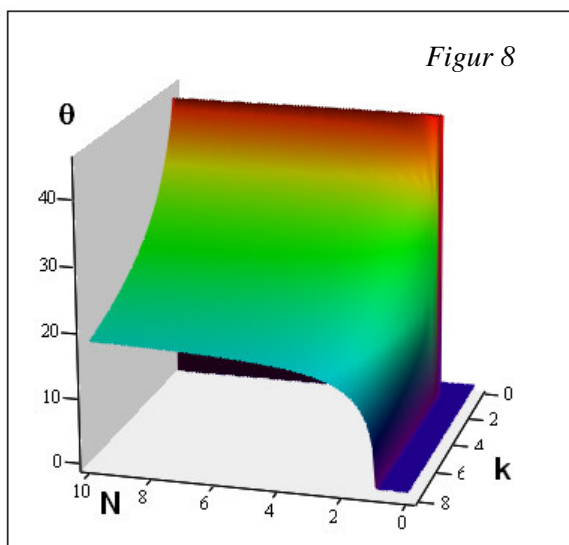
omsättningstalet N är mer känsligt för en given procentuell ändring av stublängden θ än samma procentuella ändring av impedanskvoten k . Med tanke på att det finns toleranser i hastighetsfaktorerna hos transmissionledningarna och i uppmätningen av stublängderna kommer omsättningstalet N också att ha toleranser – det är alltså önskvärt att välja områden i diagrammet där N inte varierar för hastigt vid ändringar i k .

Figur 7 är en förstordad del av diagrammet i figuren ovan, centrerad på punkten $k = 6$ och $N = 2$. Följande toleransrelationer kan uppskattas ur figur 7:



Varierar man stublängden ± 1 grader och håller k konstant, blir avvikelser ΔN cirka ± 0.1 runt mittvärdet 1.5 (7 procent). Håller man N konstant kommer en ändring $\Delta\theta = \pm 1$ grad att ge en ändring $\Delta k = \pm 1$ relativt mittvärdet 6 (ungefär 17 procent).

En fråga är vilka av konstruktionsparametrarna k och θ som kan ställas in noggrannast för att få ett önskat omsättningstal N . Parametrarna beror av ledningarnas material (hastighetsfaktor) och dimensioner och också på den noggrannhet man kan få vid uppmätning och tillverkning. Rent allmänt verkar val av större k värden för att få måttliga N värden (övre vänstra halvan av diagrammet) vara känsligt för toleranser hos avvikelser $\Delta\theta$. Ett liknande resonemang kan göras för nedre högra delen av figur 7, där en liten avvikelse Δk kan orsaka en stor avvikelse ΔN .



Diagrammet figur 8 visar "lösningssyta" för ekvationerna set

$$\theta = \operatorname{atan} \left[\sqrt{k \cdot \frac{(N-1)}{(N \cdot k^2 - 1)}} \right]$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = Z_0 \cdot Z_3$$

Krökningen hos ytan ökar när N och/eller k närmar sig värdet 1. Detta innebär att en liten ändring i en av koordinaterna orsakar en stor ändring i den andra koordinaten, vilket kan ge problem med noggrannheten. Den bästa "arbetsområdet" på ytan verkar vara den del av det gröna delen med minst krökning och man bör undvika området där $k < 2$ och $N < 2$, där θ börjar ändras snabbt (det blågröna och blå området).

Stående vågförhållande

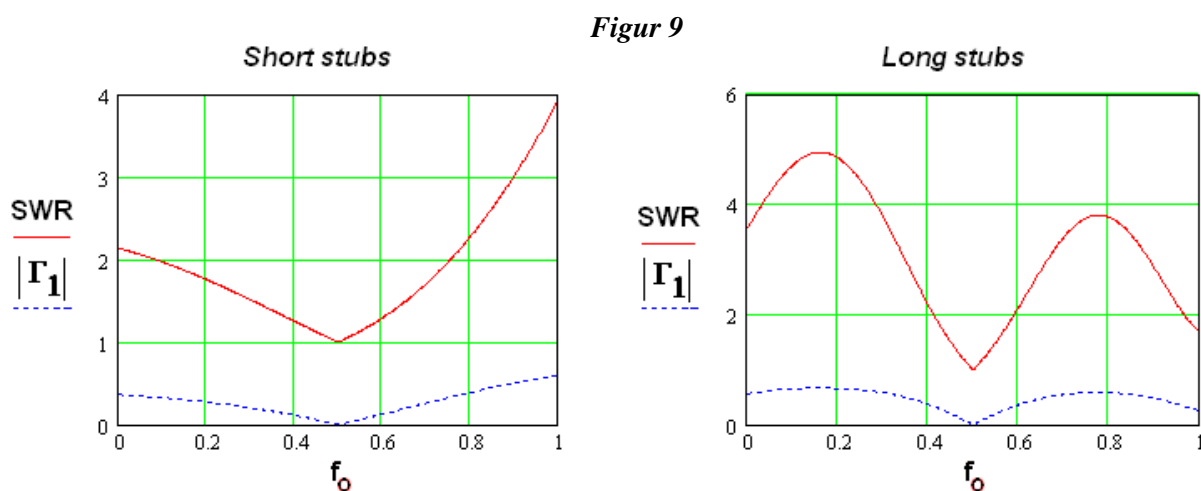
Ett av kvalitetsmåten på en anpassningssektion i form av stubar i kaskad kan vara dess stående vågbandbredd. Denna kommer att variera mellan olika val av stublängder för att erhålla ett visst omsättningstal och frågan är nu vad som är "bäst" med avseende på bandbredd när belastningen är en

given parameter. Ståendevågförhållandet (SVF) vid sändaränden beräknas genom att först beräkna reflektionsfaktorn Γ_1 som funktion av frekvensen och därefter ståendevågförhållandet SVF (utgå t.ex. från ekv (15) ovan):

$$\text{SVF} = \frac{1 + |\Gamma_1|}{1 - |\Gamma_1|}$$

Reflektionsfaktorn Γ_1 är en funktion av frekvensen via θ och ett frekvenssvop kan enkelt göras genom att variera θ (som är proportionell mot frekvensen) omkring det nominella värdet för anpassning.

För att visa skillnaderna i SVF mellan två möjliga lösningar av en kaskadsektion beräknades följande SVF-värden m.h.a. ekvationerna (19) och (23) och impedanserna $Z_0 = 50$, $Z_1 = 100$, $Z_2 = 75$ och $Z_L = 120 + 60j$, figur 9:

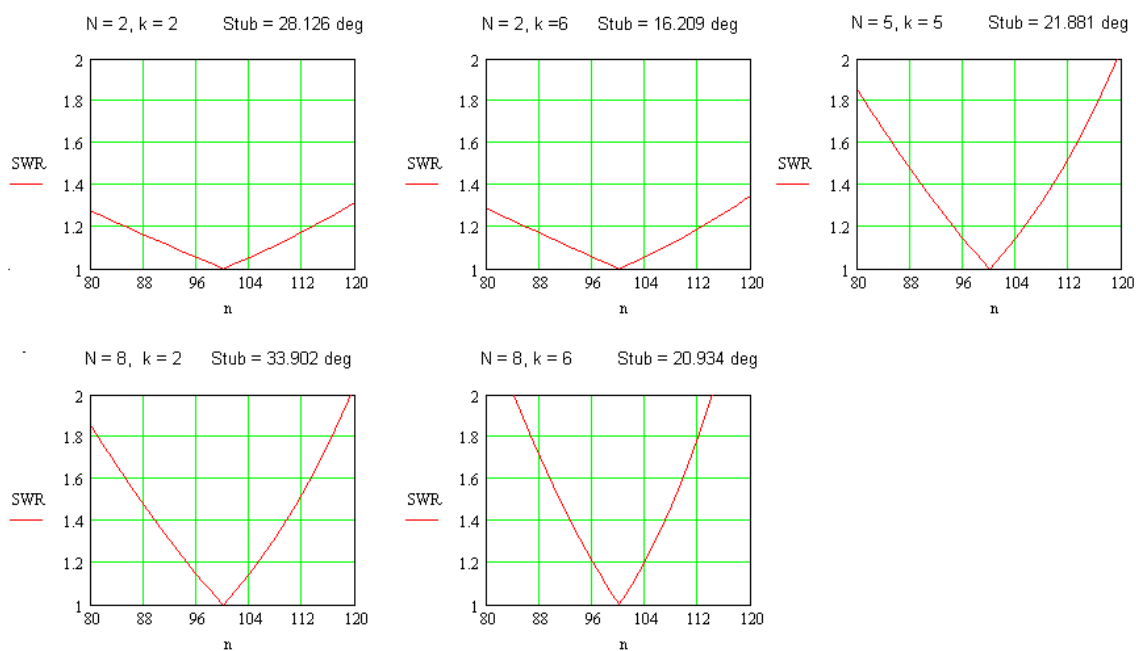


Lösningen “short stubs” ger $\theta_1 = 0.8092$ och $\theta_2 = 0.8537$ radianer; lösningen “long stubs” ger $\theta_1 = 2.3324$ och $\theta_2 = 2.9167$. Lösningen med korta stubar ger märkbart större bandbredd än alternativet med långa stubar.

En annan uppsättning SVF-beräkningar har gjorts för fem typiska punkter i konturdiagrammet figur 6. Två punkter med $k = 2$ och $N = 2$ och 6 resp., två punkter med $k = 6$ och $N = 2$ och 8 samt en femte punkt mitt emellan med $k = 5$ och $N = 5$ valdes. Beräkningarna gjordes med en frekvensvariation av $\pm 20\%$ runt dess nominella värde 100% .

Figur 10 nedan visar variationen hos SVF vs. frekvensen. En allmän slutsats från SVF-kurvorna i figur 10 är att bandbredden blir mindre för stora omsättningsförhållanden. Skillnaden i SVF mellan ett stort värde för k (översta, kurvan i mitten) och ett litet k (överst, vänster) är liten. Ökande värden på N verkar ge en avtagande bandbredd. Kaskadkopplade stubar med lågt till måttligt N verkar vara ganska bredbandiga komponenter –hela 75/80 meter amatörbandet är mindre än $\pm 7\%$ runt bandmitten och de övriga banden är smalare.

Figur 10



Till slut

- Algebraiska analyser av kretsar med transmissionsledningar blir för det mesta komplicerade och behöver oftast datorstöd med förmåga att hantera matriser och komplexa tal, t.ex. MatLab, SciLab, MathCad eller Mathematica. Den här artikel visar hur man härleder konstruktionsformler för åtminstone fyra varianter av kaskadsektioner och visar några olika tillvägagångssätt för att göra beräkningarna. Det förefaller som om teoretiska beräkningar blir mer eleganta och hanterliga om man använder reflektionsfaktor och reflektionskoefficienter vid teoretiska beräkningar. Matrismetoder lämpar sig kanske bättre vid numeriska beräkningar. Den mest grundliga och systematiska behandlingen av anpassningsproblemet som författaren har funnit på nätet (så långt) är *Orfanidis* book [3] – den innehåller många intressanta exempel och beräkningsprocedurer.
- Det finns beräkningsverktyg tillgängliga på Internet, se t.ex. “series match calculator” *smc.exe* som tillhandahålls av *Greg Ord* W8WWV [11]. I ref. [8] listar *A E Weller*, W8KDW, ett BASIC-program för att beräkna parameterarna i en kaskadsektion.
- Att använda kaskadkopplade anpassningssektioner kan vara ett intressant alternativ till LC-nät eller transformatorer/baluner. En kaskadsektion är enkel att tillverka och justera, ökar inte matarledningens vikt nämnvärt och kan vara en lämplig komponent att ha med sig vid mobil- eller portabelanvändning. En tänkbar fördel är med en kaskadsektion som anpassningsenhet kan man hålla SVF lågt över huvuddelen av en lång matarledning, vilket kan hålla förlusterna låga. En möjlig nackdel kan vara att man bör ha en god uppfattning om vad belastningsimpedansen (antennens impedans) innan stublängderna kan beräknas. Osäkerheten i vår kännedom om belastningsimpedansen är oftast den största begränsningen för en riktig beräkning. De bästa resultatet erhålls om man använder ett bra antennmätinstrument för att bestämma antennimpedans och de elektriska egenskaperna (hastighetsfaktor) för stubmaterialet innan man gör några beräkningar. Simuleringar ger en vägledning, men måste kompletteras med fakta från mätningar.
- Det är fullt möjligt att konstruera kaskader för att mata antenner som fungerar på två eller fler band. Ett ganska primitivt exempel är ju G5RV-antennen, men man kan hitta mer sofistikerade

exempel inom mobiltelefonitekniken. Teori om bred- och multibandtillämpningar för kaskadsektioner med beräkningsexempel finns t.ex. i kapitel 11.4 av *Orfanidis* utmärkta bok på Internet [3].

- Kaskadsektioner förefaller vara användbara även inom ett brett amatörband utan att minska antensystemets SVF-bandbredd märkbart. I en kaskadsektion där Z_2 är en koaxialledning kan denna stub lindas på en ferritkärna eller man kan trä på den ferritringar (à la W2DU) och låta den få dubbla funktioner som strömbalun och anpassningsselement, (förutsatt stuben är tillräckligt lång för att ge den erforderliga serieinduktansen när den lindas på kärnan).
- När belastningen är resistiv eller nära resistiv rekommenderas metoden att använda parameterinställningen $Z_2 = Z_0$ och ett standardvärde för impedansen Z_1 . Om ett tillräckligt stort värde används för Z_1 kan man anpassa belastningar inom ett brett område, se figur 4 och ekvation (28). Konturdiagrammet i figur 5 kan användas för att välja parametrarna k och N .

Referenser

1. "Series Matching: A Review", L. B. Cebik, W4RNL, <http://www.cebik.com/trans/ser.html>
2. ARRL "Antenna Book", Ed. 20, page 26-5
3. *Electromagnetic Waves och Antennas*, Sophocles J. Orfanidis
<http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/> Kapitel 8 och 11
Denna bok innehåller en mycket bra genomgång av anpassningsmetoder med många exempel och beräkningsexempel (MatLab).
4. "Impedance Matching with a Series Transmission Line Section" Frank A. Regier, Proceedings of the IEEE (July, 1971), 1133-1134.
5. "The Series-Section Transformer," Frank A. Regier, Electronic Engineering (August, 1973), 33-34.
6. "Series-Section Transmission-Line Impedance Matching," Frank A. Regier, QST (July, 1978), 14-16.
7. "The Twelfth-Wave Matching Transformer", Darrel Emerson,
<http://www.tuc.nrao.edu/~demerson/twelfth/twelfth.htm>
8. "Series Section Transmission Line Transformers" Albert E. Weller, Jr., WD8KBW
<http://www.tuc.nrao.edu/~demerson/weller/weller.pdf>
9. "Minimum-length cascades of short transmission lines", Douglas Miron
http://rfdesign.com/mag/radio_minimumlength_cascades_short/
10. Series Matching Calculator *SMC.EXE* by Greg Ordy W8WWV
<http://www.seedsolutions.com/gregordy/Software/Software.htm>
11. "A Convenient Transformer for Matching Coaxial Lines", B. Bramham, Electronic Engineering January, 1961 (pp. 42-44)
12. *Scilab* är en fri matematikprogramvara som liknar MatLab och kan exekvera många MatLab-filer. Scilab kan laddas ner från <http://www.scilab.org/download>